Partiel du 30 Mars 2011.
Durée : 1 heure 30.

Les documents, calculatrices et portables sont interdits.
La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Soit $N(t)$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note $(T_i)_{i\geq 1}$ ses temps de saut ($T_0 = 0$) et $(\tau_i)_{i\geq 1} = (T_i - T_{i-1})_{i\geq 1}$ les temps séparant les sauts. On étudie dans deux parties totalement indépendantes certaines propriétés de ce processus.

Partie A. On fixe un borélien borné B de $\mathbb{R}^+$. On note T un de ses majorants. Dans cette partie, on cherche la loi de

$$X(B) = \sharp\{i \geq 1,\ T_i \in B\} = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{T_i \in B\}}.$$

1. Dans le cas particulier où $B = [0, b]$, $b > 0$, quelle est la loi de $X(B)$?
2. Rappeler la loi de $(T_1, \cdots, T_n)$ sachant $\{N(T) = n\}$.
3. Déterminer pour tout $k \geq 0$ et tout $n \geq 1$

$$\mathbb{P}(X(B) = k | N(T) = n).$$

4. En déduire la loi de $X(B)$.

Partie B. Dans cette partie on étudie la loi de $M_n = \max\{\tau_1, \cdots, \tau_n\}$ ($n > 0$ est un entier fixé).

1. Calculer pour $u > 0$, $\mathbb{P}(M_n \leq u)$.
2. En déduire que $\frac{M_n}{\ln n}$ converge en loi quand n tend vers l'infini. Préciser la loi limite.
3. La convergence a-t-elle lieu en probabilité ?

Exercice 2. On considère un portefeuille de risques dont le coût des sinistres est modélisé par des variables aléatoires $X_i, i \geq 1$, indépendantes identiquement distribuées, de loi de Pareto de paramètre $\alpha > 0$, c'est-à-dire de densité

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} 1_{\{x>1\}}.$$

Soit N un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ modélisant les temps d'arrivée des sinistres. On suppose N indépendant de la suite $(X_i, i \geq 1)$ et on note

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

la charge sinistrale totale au temps t, $t \geq 0$ (avec la convention usuelle $S(t) = 0$ si $N(t) = 0$).

1. Calculer l'espérance et la variance de X_1, en prenant soin de préciser pour quelles valeurs de α ces quantités sont finies.

   On suppose dans la suite que Var$(X_1) < \infty$.

2. Calculer l'espérance et la variance de $S(t)$.

3. Calculer la prime pure à l'instant t, ainsi que que la prime d'assurance basée sur le principe de la variance (on note ρ le coefficient de chargement technique).

4. Pour $u, t \geq 0$, calculer $\mathrm{Cov}(S(u), S(t+u))$.

5. On regarde à présent un modèle plus sophistiqué, tenant compte de l'actualisation du coût des sinistres au cours du temps. Soit $r > 0$ fixé. On pose

$$\tilde{S}(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} e^{-rT_i} X_i,$$

   $0 < T_1 < T_2 < ...$ étant les temps de saut du processus N. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{E}[\tilde{S}(t)|N(t) = n]$. En déduire une expression de $\mathbb{E}[\tilde{S}(t)]$ en fonction de t, λ, r et α.