TD1. Processus de Poisson.

Exercice 1. Soit $(\tau_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires positives, i.i.d. On pose:

$$T_n = \tau_1 + \ldots + \tau_n, \quad n \geq 1,$$

$(T_0 = 0)$ et

$$N(t) = \#\{i \geq 1 \colon T_i \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

1. Donner une condition nécessaire pour que la probabilité que le processus N n'ait pas de sauts de taille supérieure ou égale à 2 soit strictement positive.

2. Est-il possible que la suite $(T_n, n \geq 0)$ ait une limite finie avec une probabilité strictement positive ?

3. En déduire la probabilité de l'événement $\{\exists t \geq 0 \colon N(t) = \infty\}$.

Exercice 2. Montrer que un processus de Poisson ne possède pas de sauts de taille plus grande que 1. Soit $t_k^{(n)} = k\,t/n$ pour tout $k = 0, \ldots, n$ et

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_{\left(N_{t_{i+1}^{(n)}} - N_{t_i^{(n)}}\right) \geqslant 2}, \qquad Q = \sum_{n \geqslant 1} S_{n^2}$$

a) Calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et montrer que $\mathbb{E}[Q] < +\infty$;

b) Montrer que $\lim_{n \to \infty} S_{n^2} = 0$ presque surement et que $\mathbb{P}(\exists n \geqslant 1 \colon S_{n^2} = 0) = 1$;

c) Conclure que $\mathbb{P}(\exists s \in [0, t] : N_s - N_{s-} \geqslant 2) = 0$.

Exercice 3. Soit N un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. Montrer et interpréter les assertions suivantes:

1. $\mathbb{P}(N(h) = 1) = \lambda\,h + o(h)$ $(h \to 0)$

2. $\mathbb{P}(N(h) \geq 2) = o(h)$ $(h \to 0)$

3. $\mathbb{P}(N(h) = 0) = 1 - \lambda\,h + o(h)$ $(h \to 0)$.

4. $\forall t \geq 0$, $\mathbb{P}(N \text{ saute au temps } t) = 0$.

5. Calculer $\mathrm{Cov}(N(s), N(t))$, $\forall s, t \geq 0$.

Exercice 4. On veut montrer que un processus de comptage à accroissements indépendants et stationnaires tel que $(\lambda > 0)$

$$\mathbb{P}(N(h) = 1) = \lambda\,h + o(h), \qquad \mathbb{P}(N(h) \geqslant 2) = o(h)$$

est un processus de Poisson d'intensité λ. Soit $g_t(u) = \mathbb{E}[e^{iuN_t}]$.

a) Montrer que $g_{t+h}(u) = g_h(u)\,g_t(u)$ pour tout $h, t > 0$.

b) Montrer que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_t(u) = \lambda(e^{iu} - 1) g_t(u), \qquad g_0(u) = 1$$

et conclure que $g_t(u) = e^{\lambda t(e^{iu}-1)}$.

Exercice 5. Soit N un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$, modélisant les temps d'arrivée des sinistres d'une compagnie d'assurance. Soit T_1 le temps d'arrivée du premier sinistre. Montrer que la loi de T_1 sachant $N(t) = 1$ est uniformément distribuée sur $[0, t]$.

Exercice 6. Soit $(T_n,\ n \geq 0)$ $(T_0 = 0)$ un processus de renouvellement et N le processus de comptage associé. On suppose que N est à accroissements indépendants et stationnaires.

a) Montrer que

$$\mathbb{P}\,(T_1 > s + t) = \mathbb{P}(T_1 > t)\mathbb{P}(T_1 > s), \quad \forall s, t \geq 0.$$

b) En déduire que N est un processus de Poisson.

Exercice 7.

a) Montrer que deux processus de Poisson indépendants ne sautent presque jamais simultanément.

b) Soient N^1 et N^2 deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. Montrer que le processus défini pour tout $t \geq 0$ par

$$N(t) = N^1(t) + N^2(t)$$

est un processus de Poisson. Préciser son intensité.

c) En déduire que la somme de n processus de Poisson indépendants d'intensités respectives $\lambda_1 > 0, ..., \lambda_n > 0$ est un processus de Poisson dont précisera l'intensité.

Exercice 8. Des insectes tombent dans une assiette de soupe suivant un processus de Poisson N d'intensité $\lambda > 0$ ($N(t) = n$ signifie qu'il a n insectes dans la soupe au temps t). On suppose que chaque insecte est vert avec probabilité $p \in\ ]0,\ 1[$, et que sa couleur est indépendante des couleurs des autres insectes. Montrer que le nombre d'insectes verts tombés dans la soupe, en fonction du temps, est un processus de Poisson d'intensité $\lambda\, p$.

Exercice 9. Des greffons de foie arrivent à un bloc opératoire suivant un processus de Poisson N d'intensité $\lambda > 0$. Deux patients attendent d'Řtre greffés. Le premier a une durée de vie T (avant greffe) qui suit une loi exponentielle de paramètres μ_1, le second une durée de vie T' qui suit une loi exponentielle de paramètres μ_2. Le principe est que le premier greffon qui arrive au bloc est pour le premier patient, s'il est encore en vie, sinon il va au second patient. On suppose que les v.a. T, T' et N sont indépendantes.

a) Calculer la probabilité que le premier patient soit greffé.

b) Calculer la probabilité que le deuxième patient soit greffé.

c) On note X le nombre de greffons arrivés entre $[0, T]$. Déterminer la loi de X.

Exercice 10. Paradoxe de l'autobus. On suppose que les arrivées de bus à un arrêt donné suivent un PP d'intensité λ. Vous arrivez à l'arrêt à l'instant t.

a) Intuitivement, quel sera votre temps moyen d'attente avant l'arrivée du prochain bus ?

b) On note $A(t) = T_{N(t)+1} - t$ le temps d'attente avant l'arrivée du prochain bus et $B(t) = t - T_{N(t)}$ le temps qui s'est écoulé depuis le passage du dernier bus. Calculer la loi jointe de $(A(t), B(t))$ (on pourra calculer $\mathbb{P}(A(t) \geq x_1, B(t) \geq x_2)$ pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+$).

c) En déduire que les variables $A(t)$ et $B(t)$ sont indépendantes et donner leurs lois respectives.

d) En particulier, que vaut $\mathbb{E}[A(t)]$? Cela correspond-t-il à votre réponse intuitive ?

Exercice 11. LFGN et TCL.

a) Enoncer et montrer la Loi Forte des Grands Nombres pour un processus de Poisson N d'intensité λ.

b) Montrer que N satisfait le théorème Central Limite suivant quand $t \to \infty$

$$\frac{N(t) - \lambda\, t}{\sqrt{\lambda\, t}} \overset{\text{loi}}{\to} Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

1. en utilisant les fonctions caractéristiques
2. en commençant par montrer que $(N(n) - \lambda\, n)/\sqrt{\lambda\, n}$ converge en loi vers Z, puis que $\max_{t \in [n, n+1)} (N(t) - N(n))/\sqrt{n} \to 0$ en probabilité.

Exercice 12.

a) Rappeler la (une) densité du n-uplet $(T_1, ..., T_n)$ sachant $N(t) = n$ lorsque N est un PP d'intensité λ et $0 < T_1 < ... < T_n < ...$ ses temps de saut.

b) En déduire une densité de T_i sachant $N(t) = n$, $\forall 1 \leq i \leq n$ et celle de (T_i, T_j) sachant $N(t) = n$, $\forall 1 \leq i < j \leq n$.

c) On pose $U_{i,j} = T_j - T_i$, $1 \leq i < j \leq n$. Donner une densité de $U_{i,j}$ sachant $N(t) = n$. En déduire une densité de l'étendue $T_n - T_1$ sachant $N(t) = n$.

Exercice 13. Martingales. Soit $X = (X(t), t \geq 0)$ un processus à temps continu et $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ une *filtration*, c'est-à-dire une famille de tribus emboitées $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ $\forall s \leq t$, où $\mathcal{A}$ est la tribu de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel on travaille. On dit que X est une *martingale* par rapport à la filtration $\mathcal{F}$ si $X(t)$ est intégrable $\forall t$ et

$$\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s), \quad \forall 0 \leq s \leq t.$$

Soit $N = (N(t), t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$. Montrer que les processus

1. $(N(t) - \lambda\, t)_{t \geqslant 0}$;
2. $((N(t) - \lambda\, t)^2 - \lambda\, t)_{t \geqslant 0}$;
3. $(\exp(u\, N(t) + \lambda\, t\, (1 - e^u)))_{t \geqslant 0}$ pour u fixé dans $\mathbb{R}$;

sont des martingales par rapport à la filtration engendrée par N.

Exercice 14. Soit N un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ et $0 < T_1 < ... < T_n < \cdots$ ses temps de saut.

a) Montrer que T_n/n converge presque sûrement quand $n \to \infty$ vers une constante que l'on précisera.

b) Montrer que la série $\sum_{i\geq 1} T_i^{-2}$ converge presque sûrement. On appelle X sa limite.

c) Montrer que $X_{N(t)} := \sum_{i=1}^{N(t)} T_i^{-2} \to X$ p.s. quand $t \to \infty$.

d) On considère ici une suite $(U_i, i \geq 1)$ de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $]0, 1[$. On admet le résultat suivant:

$$n^{-2} \sum_{i=1}^{n} U_i^{-2} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} Z,$$

où Z est une variable aléatoire strictement positive, dont la loi est caractérisée par sa transformée de Laplace: $\mathbb{E}[\exp(-s\,Z)] = \exp(-c\sqrt{s}), \forall s \geq 0$, pour un $c > 0$ qu'on ne précisera pas. **Le but de cette question est de montrer que X a même loi que $c'\,Z$ et de préciser c'.**

On suppose dans ce qui suit que la suite $(U_i, i \geq 1)$ est indépendante du processus N.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t > 0$, sachant $N(t) = n$, $X_{N(t)}$ a mŘme loi que $t^{-2} \sum_{i=1}^{n} U_i^{-2}$.

2. En déduire que $X_{N(t)}$ a même loi que $t^{-2} \sum_{i=1}^{N(t)} U_i^{-2}$.

3. Montrer que

$$N(t)^{-2} \sum_{i=1}^{N(t)} U_i^{-2} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{loi}} Z$$

4. Rappeler la loi forte des grands nombres pour le processus de Poisson N et conclure.

e) En déduire que $\mathbb{E}[X] = \infty$.