TD3. Processus de Poisson composés, processus de renouvellement.

Exercice 1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus de Poisson composé soit un processus de Poisson standard.

Exercice 2. Trouver la fonction de renouvellement et la mesure de renouvellement d'un processus de renouvellement lorsque les temps d'inter-arrivée sont distribués suivant une loi Gamma de paramètres 2, $\beta > 0$. Démontrez les théorèmes de renouvellement élémentaire et clé dans ce cas.

Exercice 3. Une machine tombe en panne et est réparée de manière répétée. On appelle (X_i, $i \geq 1$) les durées successives durant lesquelles la machine est en état de marche, et (Y_i, $i \geq 1$)les durées successives durant lesquelles la machine est en réparation. Autrement dit, la machine fonctionne durant l'intervalle de temps $[0; X_1[$, est en réparation durant la période$[X_1; X_1 + Y_1[$, fonctionne à nouveau durant la période $[X_1 + Y_1; X_1 + Y_1 + X_2[$ et ainsi de suite. On suppose que (X_i, $i \geq 1$) est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi commune continue, strictement positive et intégrable. On suppose que la suite (Y_i, $i \geq 1$) vérifie les mêmes hypothéses, et qu'elle est de plus indépendante de la suite (X_i, $i \geq 1$). On s'intéresse àl a probabilité $p(t)$ que la machine soit en état de marche à l'instant t.

1. Soit $Z_1 = X_1 + Y_1$ et soit F la fonction de répartition de Z_1. Montrer que $p(t)$ vérifie l'équation de renouvellement
$$p(t) = \mathbb{P}(X_1 > t) + \int_0^t p\,(t - s)\mathrm{d}F(s), \quad \forall t \geq 0.$$
2. En déduire que
$$\lim_{t \to \infty} p(t) = \frac{\mathbb{E}[X_1]}{\mathbb{E}\,[X_1 + Y_1]}.$$

Exercice 4. Soit N un processus de renouvellement et $F(t) = T_{N(t)+1} - t$ le temps écoulé entre le temps t et le temps du $(N(t) + 1)$-éme renouvellement, $t \geq 0$. On note $\mathbb{P}_{T_1}$ la loi des temps d'inter-arrivée et F_{T_1} sa fonction de répartition.

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, la fonction $\mathbb{P}(F(t) > x)$ vérifie l'équation de renouvellement
$$\mathbb{P}(F(t) > x) = 1 - F_{T_1}(t + x) + \int_0^t \mathbb{P}(F\,(t - u) > x)\mathrm{d}\mathbb{P}_{T_1}(u), \quad t \geq 0.$$
On pourra commencer par découper la probabilité $\mathbb{P}(F(t) > x)$ en deux, suivant que $T_1 > t$ ou $T_1 \leqslant t$.
2. Résoudre cette équation lorsque les temps d'inter-arrivée suivent une loi exponentielle.

Exercice 5. Dans le cadre de l'exercise 4 on considère un processus de renouvellement dont les temps d'inter-arrivées suivent la loi de Pareto définie par
$$\mathbb{P}(\tau_1 > x) = \frac{1}{(1 + x)^{\alpha}}, \quad x \geqslant 0.$$

1. Soit X une variable aléatoire positive quelconque. Montrer que $\forall r > 0$,
$$\int_0^{\infty} r\,x^{r-1}\,\mathbb{P}(X > x)\mathrm{d}x = \mathbb{E}[X^r].$$

2. Utiliser la relation précédente et l'equation de renouvellement satisfaite par $F(t)$ pour montrer que

$$\mathbb{E}[F(t)^2] = \int_0^t \left(\int_0^\infty \frac{2\,x}{(1+t-u+x)^\alpha} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}m(u).$$

3. En déduire que pour $\alpha > 3$,

$$\mathbb{E}[F(t)^2] \underset{t \to \infty}{\to} 2 \int_0^\infty x\,(1+x)^{1-\alpha} \mathrm{d}x.$$

   Calculer cette intégrale limite.