TD4. Théorie de la ruine.

Dans tous les exercices de cette feuille faisant intervenir le modèle de Cramér-Lundberg on note $c > 0$ le coefficient de prime instantanée, $\lambda > 0$ l'intensité du processus de Poisson modélisant l'évolution du nombre de sinistres au cours du temps et $u \geq 0$ le capital initial de l'assureur.

Exercice 1.

1. Montrer que les lois suivantes sont à queues fines :

   a. loi d'une variable aléatoire positive bornée par une constance déterministe

   b. lois Gamma

   c. lois de Weibull de paramètres $C > 0, \gamma \geq 1$ (on rappelle que la densité d'une loi de Weibull de paramètres C, γ est $f(x) = C\gamma x^{\gamma-1} \exp(-Cx^\gamma)\mathbf{1}_{\{x>0\}}$)

2. Montrer que les lois suivantes sont sous-exponentielles :

   a. lois de Pareto de paramètres $\alpha > 0, \beta > 0$ ($f(x) = \alpha\beta^\alpha/(\beta + x)^{\alpha+1}, x > 0$)

   b. lois de Weibull de paramètres $C > 0, \gamma < 1$.

Exercice 2. Dans cet exercice, les paramètres $c > 0$, $\lambda > 0$ et $\beta > 0$ sont *fixés*. Pour chaque entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère le modèle de Cramér-Lundberg où les coûts des sinistres sont distribués suivant une loi $\Gamma(k,\ \beta)$ et on note $\psi^{(k)}(u)$ la probabilité de ruine associée. Montrer que pour tout $u > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\psi^{(k)}(u) \leq \psi^{(k+1)}(u).$$

Exercice 3. On considère le modèle de Cramér-Lundberg oİ les coûts des sinistres suivent une loi exponentielle $\mathcal{E}(\gamma)$, $\gamma > 0$. Le coefficient de chargement de sécurité ρ est supposé strictement positif. On veut calculer explicitement la probabilité de ruine de l'assureur, que l'on note $\psi(u)$.

1. Montrer que la loi $\mathcal{E}(\gamma)$, $\gamma > 0$, est une loi à queue fine et calculer le coefficient d'ajustement R associé.

2. En déduire un “bon" majorant de la probabilité de ruine à l'aide de l'inégalité de Lundberg.

3. Ecrire l'équation de renouvellement vérifiée par la fonction $u \mapsto e^{Ru}\psi(u)$.

4. A l'aide du théorème de renouvellement, résoudre l'équation de renouvellement et expliciter $\psi(u)$ en fonction de γ, ρ et u.

Exercice 4. On considère le modèle de Cramér-Lundberg où les coûts X_i, $i \geq 1$ suivent une loi de Pareto d'indice $\alpha > 1$, $\beta = 1$, c-à-d

$$\bar{F}_{X_1}(x) = (1 + x)^{-\alpha}, \quad x \geq 0.$$

1. Calculer $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et le coefficient de chargement de sécurité ρ. Pour quelles valeurs de c a-t-on $\rho > 0$?

2. Montrer que $\int_0^\infty e^{ux}\, F_{X_1,I}(\mathrm{d}x) = \infty$ pour tout $u > 0$. En déduire que $F_{X_1,I}$ n'est pas à queue fine.

3. Montrer que $F_{X_1,I}$ est sous-exponentielle. Que peut-on dire de la probabilité de ruine $\psi(u)$ quand $u \to +\infty$?

Exercice 5. Exercice 5 (partie de l'examen de Mai 2010). On se place dans le cadre du modèle de Cramér-Lundberg.

Partie A. Les variables $X_i, i \geq 1$ modélisant les coûts des sinistres sont ici continues, de densité

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{-\sqrt{x}}\, \mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

1. Calculer $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et la fonction $\bar{F}_{X_1}(x), x \geq 0$.

2. Pour tout $x \geq 0$, on pose $F_{X_1,I}(x) = \mu^{-1} \int_0^x \bar{F}_{X_1}(y)\mathrm{d}y$ et

$$q(x) = \frac{\bar{F}_{X_1}(x)/\mu}{\bar{F}_{X_1,I}(x)}.$$

   a. Montrer que

$$\int_x^\infty e^{-\sqrt{y}}\mathrm{d}y = 2\, e^{-\sqrt{x}}\, (\sqrt{x}+1), \quad \forall x \geq 0,$$

   et en déduire une expression simple de $q(x)$.

   b. En déduire que $F_{X_1,I}$ est la fonction de répartition d'une loi sous-exponentielle.

3. Donner alors un équivalent de la probabilité de ruine $\psi(u)$ quand $u \to \infty$. Exprimer cet équivalent en fonction de la densité f et des paramètres c, λ de l'énoncé.

Partie B. On suppose à présent que les $X_i, i \geq 1$ ont pour densité

$$g(x) = 2\, x\, e^{-x^2}\, \mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

1. Montrer que $\mu = \sqrt{\pi}/2$.

2. Montrer que X_1 est à queue fine.

3. Montrer que le coefficient d'ajustement existe. *On ne demande pas de le calculer*. On le notera dans la suite R.

4. Exprimer l'intégrale $\int_0^\infty y\, e^{Ry-y^2}\mathrm{d}y$ en fonction de c, λ et R. En déduire une expression de l'intégrale $\int_0^\infty e^{Ry-y^2}\mathrm{d}y$ en fonction de c, λ et R.

5. Calculer $\mathrm{d}F_{X_1,I}$ et rappeler l'équation de renouvellement vérifiée par la fonction $u \mapsto e^{Ru}\, \psi(u)$, en justifiant que les hypothèses nécessaires à sa mise en place sont bien vérifiées ici.

6. Donner le comportement asymptotique de la probabilité de ruine $\psi(u)$ lorsque $u \to \infty$. On exprimera le résultat en fonction de c, λ, R et π.

Exercice 6.

1. **Première partie**

   Un assureur dispose d'un portefeuille de risques partitionné en deux classes : les grands risques de coûts notés X_i^1, $i \geq 1$ et les petits risques de coûts notés X_i^2, $i \geq 1$, où les deux types de risque sont indépendants.

   La charge sinistrale totale au temps t de la compagnie est notée

   $$S_t = S_t^1 + S_t^2$$

   où $S_t^1 = \sum_{i=1}^{N_t^1} X_i^1$ est la charge sinistrale de la première classe et $S_t^2 = \sum_{i=1}^{N_t^2} X_i^2$ celle de la seconde classe. Les processus $(N^i)_{i=1,2}$ sont des processus de Poisson d'intensité λ^i, indépendants entre eux et indépendants des différents coûts X_i^1, X_i^2, $i \geq 1$. On suppose que $(X_i^1, i \geq 1)$ est un échantillon de loi F^1 et que $(X_i^2, i \geq 1)$ un échantillon de loi F^2 .

   a. Rappeler la valeur de la fonction $M_{S_t^1}$, fonction génératrice des moments de S_t^1, puis celle de S_t^2 et en déduire celle de S_t.

   b. Verifier que S est bien un processus de Poisson composé qu'on écrira sous la forme

   $$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0,$$

   où N est un processus de Poisson d'intensité $\lambda = \lambda^1 + \lambda^2$ et $Y_i, i \geq 1$ un échantillon de loi F mélange des lois F^1 et F^2 dont on précisera les coefficients du mélange.

   c. On suppose à présent que $F^1 = \mathcal{E}(\gamma)$ est la loi exponentielle de paramètre $\gamma > 0$ et $F^2 = \mathcal{P}ar(\alpha, 1)$ est la loi de Pareto de paramètres α, 1, avec $\alpha > 1$. Calculer dans ce cas la densité $f_{Y_1,I}(y)$, la fonction $\bar{F}_{Y_1,I}(y)$, l'espérance $\mathbb{E}[Y_1]$ et le coefficient $q(y) = \frac{f_{Y_1,I}(y)}{\bar{F}_{Y_1,I}(y)}$.

   d. On considère le modèle de Cramér-Lundberg

   $$U_t = u + c\,t - S_t, \quad t \geq 0$$

   où $u \geq 0$ est l'avoir initial de la compagnie. On suppose que le coefficient de chargement de sécurité ρ est le même pour chacune des classes et on prend comme coefficient de prime instantanée

   $$c := (1+\rho)\,\mathbb{E}[Y_1]$$

   avec $\rho > 0$. Sous les hypothèses de la question (c), calculer c en fonction des paramètres du modèle et donner un équivalent à l'infini de la probabilité de ruine $\psi(u)$.

2. **Deuxième partie**

   L'assureur décide de ne plus séparer les deux groupes de risque, mais de fixer une franchise $a > 0$. L'assureur ne payant que pour les sinistres excédant le seuil a, remboursera pour un sinistre de montant $Z > a$ le montant $(Z - a)$.
   On considère alors le modèle de Cramér -Lundberg

   $$U_t = u + c\,t - S_t \quad \text{où} \quad S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i^a \quad \text{et} \quad Y_i^a = (Z_i - a)^+$$

N étant un processus de Poisson d'intensité λ.

a. On demande de calculer la valeur $\mu = \mathbb{E}[Y_1^a] = \mathbb{E}[(Z_1 - a)^+]$. pour des sinistres dont le montant Z suit une loi $\mathcal{E}(\gamma)$

b. Calculer $M_{Y_1^a}$, la fonction génératrice des moments de Y_1^a, et en déduire celle de S_t.

c. Montrer que $M_{S_t}(u) = M_{S'_t}(u)$ où

$$S'_t = \sum_{i=1}^{N'_t} Z_i$$

N'_t étant un processus de Poisson d'intensité $\lambda \exp(-\gamma a)$ indépendant des Z_is.

d. En déduire que les processus S et S' ont la mŘme loi.

e. En déduire que le processus de risque U a même loi que U' défini par

$$U'_t = u + c\,t - S'_t, \quad t \geq 0.$$

Montrer que $\psi(u) = \mathbb{P}[\inf_{t \geq 0} U_t < 0] = \mathbb{P}[\inf_{t \geq 0} U'_t < 0]$ et donner un équivalent à l'infini pout $\psi(u)$.