Université Paris - Dauphine

Processus Aléatoires Discrets

Contrôle Continu du 16-11-2006

Durée 1h30.

Aucun document n'est autorisé. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. On considère $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov de matrice de transition P. Les chaînes suivantes sont-elles des chaînes de Markov ? Dans l'affirmative, préciser leur matrice de transition.
   (a) $W_n := X_{n+k}$, $n \geq 0$, où $k \in \mathbb{N}$ est fixé
   (b) $Y_n := X_{2n}$, $n \geq 0$

2. Soient X_1 et X_2 variables aléatoires independantes telles que $\mathbb{P}(X_i > t) = e^{-t}$. Calculer
   (a) $\mathbb{E}(X_1|Y)$.
   (b) $\mathbb{P}(X_1 < 3|Y)$.

3. *Modèle de Wright-Fisher.* Ce modèle décrit l'évolution d'un ensemble de N chromosomes au cours de générations $n = 0, n = 1$, etc. On suppose qu'il y a 2 types de chromosomes, A et B, et on note X_n le nombre de chromosomes de type A présents à la génération n (il y en a donc $N - X_n$ de type B). Le modèle évolue de la façon suivante : chaque chromosome de la génération $n+1$ choisit au hasard et uniformément un chromosome parent dans la génération n, ceci indépendamment des autres chromosomes. Le chromosome fils a alors le même type que son chromosome parent.
   (a) Sachant que $X_n = i$, calculer la probabilité qu'un chromosome donné de la génération $n + 1$ soit de type A. En déduire que la suite $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0, 1, ..., N\}$, de probabilité de transition
   $$P(i,j) = \left(\begin{array}{c} N \\ j \end{array} \right) \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j}, \forall i, j \in \{0, 1, ..., N\},$$
   où $\left(\begin{array}{c} N \\ j \end{array} \right) = \frac{N!}{j!(N-j)!}$.
   (b) Cette matrice est-elle irréductible ?
   (c) Donnez deux exemples simples de probabilités stationnaires pour cette chaîne. En déduire qu'elle possède une infinité de probabilités stationnaires.