Examen

[Durée deux heures. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont independants. Seule les reponses soigneusement justifiées seront prise en compte.]

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus contrôlée sur l'espace $M=\{0,\ldots,N\}$ avec $N>0$. Dans l'état $x\in M, x\neq 0, N$ deux actions sont possibles : soit on s'arrête et on gagne la quantité $r(x)$ avec $r\colon M\to\mathbb{R}_+$, soit on continue et l'état suivant est choisi parmi $x-1$ et $x+1$ avec égale probabilité (donc 1/2). Dans les états 0, N on s'arrête automatiquement et on perçoit la quantité $r(0)$ où $r(N)$. On considère le problème en horizon fini n (c-à-d, au n-éme pas on est obligé de s'arrêter si on l'a pas déjà fait) et aussi le problème en horizon infini. Le but est de trouver le gain moyen maximal $V_n(x)$ en horizon fini n et le gain moyen maximal $V(x)$ en horizon infini. L'espace d'action est $\mathcal{A}=\{0,1\}$ où on convient que 0 représente l'action de continuer et 1 cela de s'arrêter. Par simplicité on fait l'hypothèse que $r(0)=0$ et que quand on décide de s'arrêter on va à l'état 0. La fonction de transition $P\colon M\times\mathcal{A}\to M$ du processus contrôlée est donc homogène et donnée par $P_0(x,x\pm1)=1/2$ pour tout $x\neq 0,N$, $P_0(0,0)=P_0(N,N)=1$, $P_1(x,0)=1$ pour tout $x\in M$ et on a que, pour tout contrôle $u\in\mathcal{C}_0$

$$V_n^u(x)=\mathbb{E}^u_{(0,x)}[\sum_{i=0}^{n-1}1_{U_i=1}r(X_i)+r(X_n)]\quad V^u(x)=\mathbb{E}^u_{(0,x)}[\sum_{i\geqslant 0}1_{U_i=1}r(X_i)]$$

où $U_n=u_n(X_0,\ldots,X_n)$. On pose aussi

$$V_n(x)=\sup_{u\in\mathcal{C}_0}V_n^u(x)\qquad V(x)=\sup_{u\in\mathcal{C}_0}V^u(x).$$

a) Donner une explication intuitive de la forme des fonctions $V_n^u(x)$ et $V^u(x)$. Représentent-elle bien le gain moyen de la politique u en horizon fini et infini?

b) Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid de Bernoulli de paramètre 1/2. Donc $Z_n\colon\Omega\to E=\{0,1\}$ Déterminer la fonction $F\colon M\times\mathcal{A}\times E\to M$ qui, étant donné un contrôle $u\in\mathcal{C}_0$, permet d'écrire le processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ contrôlé par u comme une récurrence aléatoire contrôlée $X_{n+1}=F(X_n,u_n(X_0,\ldots,X_n),Z_{n+1})$.

c) Montrer que $V_n(x)$ satisfait les équations

$$V_n(x)=\max\left(r(x),(V_{n-1}(x-1)+V_{n-1}(x+1))/2\right),\qquad x\neq 0,N$$

avec $V_n(0)=0$ et $V_n(N)=r(N)$ et que $V(x)$ satisfait

$$V(x)=\max\left(r(x),(V(x-1)+V(x+1))/2\right),\qquad x\neq 0,N \tag{1}$$

avec $V(0)=0$ et $V(N)=r(N)$.

d) Justifier que pour tout $x\in M$ et pour tout $u\in\mathcal{C}_0$ $\lim_n V_n^u(x)=V^u(x)$ et que $\lim_n V_n(x)=V(x)$.

e) Montrer que V est la plus petite solution de l'équation (1) tel que $V(x) \geqslant r(x)$ pour tout $x \in M$. C-à-d, soit $Q(x) \geqslant (Q(x-1) + Q(x+1))/2$ pour tout $0 < x < N$ et $Q(x) \geqslant r(x)$ pour tout $x \in M$, montrer que $Q(x) \geqslant V(x)$ (Indication: montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $Q(x) \geqslant V_n(x)$).

f) Expliquer comment à partir de V on peut déterminer une politique markovienne optimale $u: M \to \mathcal{A}$.

g) Calculer la politique optimale dans le cas $N = 6$ et $r(x) = x(6-x)$.

Exercice 2. Soit $(M_n)_{n \geqslant 0}$ une sur-martingale et $T = \inf\{n \geqslant 0: M_n > \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]\}$ une v.a. telle que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$. Soit $\tilde{M}_n = M_{n \wedge T}$ le processus arrête au temps T.

a) Montrer que T est un temps d'arrêt.

b) Montrer que $(\tilde{M}_n)_{n \geqslant 0}$ est un processus adapté et intégrable (c-à-d $\tilde{M}_n \in L^1(\Omega)$ pour tout $n \geqslant 0$).

c) Soient F, G deux v.a. intégrables, on dit que $F = G$ sur B si $\mathbb{P}(\{\omega \in B: F(\omega) = G(\omega)\}) = \mathbb{P}(B)$ (c-à-d $F 1_B = G 1_B$ p.s). Montrer que si $B \in \mathcal{F}_n$ et $F = G$ sur B, alors

$$\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[G|\mathcal{F}_n] \qquad \text{sur } B.$$

d) Montrer que $(\tilde{M}_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale.

e) Supposons que T est un t.a. borné. Montrer que $\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_T]$.

f) Supposons que $M_n \geqslant 0$ pour tout n. Que peut-on dire de la relation entre $\mathbb{E}[M_0]$ et $\mathbb{E}[M_T]$ sans d'autre hypothèse sur T que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$?