Corrigé du Partiel

[Durée une heure et demi. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont independantes. Seule les reponses soigneusement justifiées seront prise en compte.]

Exercice 1. Soient T, S des temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

a) Montrer que $U = \min(T, S)$ est un temps d'arrêt .

b) Montrer que si $S(\omega) \leqslant T(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$ alors $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

Solution. a) Par hypothèse $\{S \geqslant k\} \in \mathcal{F}_{k-1}$ et donc $\{T = k, S \geqslant k\} \in \mathcal{F}_k$. Bien sûr on a aussi $\{S = k, T \geqslant k\} \in \mathcal{F}_k$ ce qui permet de conclure que

$$\{U = k\} = \{T = k, S \geqslant k\} \cup \{S = k, T \geqslant k\} \in \mathcal{F}_k$$

pour tout $k \geqslant 0$.

b) Soit $A \in \mathcal{F}_S$ on doit montrer que $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \geqslant 0$. On a que

$$A \cap \{T = n\} = A \cap \{S \leqslant T = n\} = \cup_{0 \leqslant k \leqslant n} (A \cap \{S = k\} \cap \{T = n\})$$

Par hypothèse $A \cap \{S = k\} \in \mathcal{F}_k$ et donc $\{S = k\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ ce qui donne $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $g(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta X_1}] < +\infty$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ la filtration naturelle de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ (c-à-d $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ pour $n \geqslant 1$) et soit $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la marche aléatoire engendrée par les $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

a) Montrer que pour tout t.a. T borné associé à la filtration naturelle on a que

$$\mathbb{E}[e^{\lambda S_T} g(\lambda)^{-T}] = 1, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) Soit $a < 0 < b$ et $T = \inf\{n > 0 : S_n \notin (a, b)\}$. Utiliser le résultat de la question a) pour montrer que si $\hat{\theta}$ est tel que $g(\hat{\theta}) = 1$ alors

$$\mathbb{P}(S_T \leqslant a) \leqslant e^{\hat{\theta} a}.$$

c) Soit $X_k = 1$ avec probabilité p et $X_k = -1$ avec probabilité $q = 1 - p$ et $p > 1/2$. Soit $T = \inf\{n > 0 : S_n = 1\}$. On suppose que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$. Montrer que

$$1 = e^{\theta} \mathbb{E}[g(\theta)^{-T}]$$

pour tout $\theta > 0$ et utiliser cet équation pour obtenir la fonction génératrice de T $\varphi(s) = \mathbb{E}[s^T]$ pour $|s| < 1$.

Solution. a) Soit T borné par N, alors

$$\mathbb{E}[\frac{e^{\lambda S_T}}{g(\lambda)^T}] = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}[\frac{e^{\lambda S_k}}{g(\lambda)^k} 1_{T=k}] = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}[\frac{e^{\lambda S_N}}{g(\lambda)^N} 1_{T=k}] = \mathbb{E}[\frac{e^{\lambda S_N}}{g(\lambda)^N}] = 1.$$

b) Si $\hat{\theta} > 0$ il y a rien a demontrer car $\mathbb{P}(S_T \leqslant a) \leqslant 1 \leqslant e^{-\hat{\theta} a}$. Supposons que $\hat{\theta} < 0$ et soit $T = \inf \{n > 0 : X_n \notin]a, b[\}$ alors on a que

$$1 = \mathbb{E}[e^{\hat{\theta} S_{T \wedge N}}] \geqslant \mathbb{E}[e^{\hat{\theta} S_{T \wedge N}} 1_{S_{T \wedge N} \leqslant a}] \geqslant e^{\hat{\theta} a} \mathbb{E}[1_{S_T \leqslant a, T \leqslant N}] = e^{\hat{\theta} a} \mathbb{P}(S_T \leqslant a, T \leqslant N)$$

et en prenant la limite (croissante) pour $N \to \infty$ on a le résultat.

c) Dans ce cas on a que $g(\theta) = p\, e^{\theta} + q\, e^{-\theta}$. Par la question a) on a que $1 = \mathbb{E}[e^{\theta S_{T \wedge N}} g(\theta)^{-T \wedge N}]$. On remarque que $e^{\theta S_{T \wedge N}} \leqslant 1$ et que $g(\theta)^{-T} \leqslant p^{-T\theta} \leqslant 1$ et donc par convergence dominée on obtient que

$$\mathbb{E}[e^{\theta S_T} g(\theta)^{-T}] = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{E}[e^{\theta S_{T \wedge N}} g(\theta)^{-T \wedge N}] = 1$$

mais $S_T = 1$ et donc on a l'équation $\mathbb{E}[(p\, e^{\theta} + q\, e^{-\theta})^{-T}] = e^{-\theta}$ pour tout $\theta > 0$. Soit $1/s = p\, e^{\theta} + q\, e^{-\theta}$ et $z = e^{-\theta}$ alors $p - z/s + q\, z^2 = 0$ et

$$z = \frac{1/s \pm \sqrt{1/s^2 - 4p\, q}}{2\, q} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p\, q\, s^2}}{2\, q\, s}$$

ce qui donne

$$\varphi(s) = \mathbb{E}[s^T] = \mathbb{E}[(p\, e^{\theta} + q\, e^{-\theta})^{-T}] = z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p\, q\, s^2}}{2\, q\, s}.$$

Exercice 3. Une chaîne de Markov contrôlée $(X_n)_{n \geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ évolue selon la récurrence aléatoire contrôlée

$$X_{n+1} = \lambda X_n + U_n + \varepsilon_{n+1}$$

où $U_n = u_n(X_k, \ldots, X_n)$, u un contrôle à valeurs dans $\mathbb{R}$ et où $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite des v.a. iid de moyenne nulle et variance $\sigma^2 > 0$. On se fixe un horizon fini $T > 0$ et une constante $\beta \in]0, 1[$. On veut trouver un contrôle u qui minimise le coût moyen (actualisé)

$$W_T^u(t, x) = \mathbb{E}_{(t,x)}^u [\sum_{k=t}^{T-1} \beta^{k-t} C(X_k, U_k) + \beta^{T-t} R(X_T)]$$

où $C(x, u) = (u^2 + a\, x^2)/2$ et $R(x) = a_0 x^2/2 + b_0$ avec a, a_0, b_0 constantes fixées et positives.

a) Montrer que la fonction $W_T(t, x) = \inf_{u \in \mathcal{C}_t} W_T^u(t, x)$ satisfait l'équation

$$W_T(t, x) = \inf_{u \in \mathbb{R}} \{c(x, u) + \beta \mathbb{E}[W_T(t + 1, \lambda x + u + \varepsilon_1)]\}.$$

b) Montrer par récurrence rétrograde que $W_T(t, x)$ est de la forme

$$W_T(t, x) = \frac{1}{2} a_{T-t} x^2 + b_{T-t}$$

avec $(a_j)_{j \geqslant 0}$ et $(b_j)_{j \geqslant 0}$ des constantes à déterminer.

c) Montrer que le contrôle optimal u^* est Markovien et tel que

$$u_t^*(x) = k_{T-t}\, x$$

pour une certaine suite $(k_j)_{j \geqslant 0}$ de constantes.

d) Calculer les constantes a_j, b_j, k_j pour $j \geqslant 0$.

Solution. a) Soit

$$V_T^u(t,x) = \beta^t W_T^u(t,x) = \mathbb{E}^u_{(t,x)}[\sum_{k=t}^{T-1} \beta^k C(X_k, U_k) + \beta^T R(X_T)]$$

Par l'équation de Bellman le coût moyen optimal $V_T(t) = \inf_{u \in \mathcal{C}_k} V_T^u(t)$ satisfait

$$V_T(t,x) = \inf_{u \in \mathbb{R}} \{\beta^t C(x,u) + \mathbb{E}[V_T(t+1, \lambda x + u + \varepsilon_1)]\}$$

pour tout $0 \leqslant t < T$ et donc

$$W_T(t,x) = \beta^{-t} \inf_{u \in \mathbb{R}} \{\beta^t C(x,u) + \mathbb{E}[V_T(t+1, \lambda x + u + \varepsilon_1)]\}$$

$$= \inf_{u \in \mathbb{R}} \{C(x,u) + \beta \mathbb{E}[W_T(t+1, \lambda x + u + \varepsilon_1)]\}.$$

b) On a que $W_T(T,x) = R(x) = a_0 x^2/2 + b_0$. Supposons que $W_T(T-n,x) = a_n x^2/2 + b_n$ alors

$$W_T(T-n-1,x) = \inf_{u \in \mathbb{R}} \{C(x,u) + \beta \mathbb{E}[W_T(T-n, \lambda x + u + \varepsilon_1)]\}$$

$$= \inf_{u \in \mathbb{R}} \{(u^2 + a\, x^2)/2 + \beta \mathbb{E}[a_n(\lambda x + u + \varepsilon_1)^2/2 + b_n]\}$$

par les hypothèses sur ε_1 on a

$$= \inf_{u \in \mathbb{R}} \{(u^2 + a\, x^2)/2 + \beta a_n (\lambda x + u)^2/2 + \beta a_n \sigma^2/2 + \beta b_n\}$$

$$= \inf_{u \in \mathbb{R}} \{(1 + \beta a_n) u^2 + (a + \beta a_n \lambda^2)\, x^2 + 2 \beta a_n \lambda\, x\, u\}/2 + \beta a_n \sigma^2/2 + \beta b_n$$

On doit donc minimiser la fonction $\varphi(u) = (1 + \beta a_n) u^2 + (a + \beta a_n \lambda^2)\, x^2 + 2 \beta a_n \lambda\, x\, u$. On a

$$\varphi'(u) = 2(1 + \beta a_n) u + 2 \beta a_n \lambda\, x = 0$$

qui nous donne $u^*_{T-n} = -\, \beta a_n \lambda x / (1 + \beta a_n)$ et donc

$$\varphi(u^*_{T-n}) = -\, \beta^2 a_n^2 \lambda^2 x^2 / (1 + \beta a_n) + (a + \beta a_n \lambda^2)\, x^2$$

et alors

$$W_T(t-n-1) = (a + \beta a_n \lambda^2 - \beta^2 a_n^2 \lambda^2/(1 + \beta a_n)) x^2/2 + \beta a_n \sigma^2/2 + \beta b_n$$

$$= (a + \beta a_n \lambda^2/(1 + \beta a_n)) x^2/2 + \beta a_n \sigma^2/2 + \beta b_n$$

$$= a_{n+1} x^2/2 + b_{n+1}$$

où

$$a_{n+1} = a + \beta a_n \lambda^2/(1 + \beta a_n) \qquad b_{n+1} = \beta a_n \sigma^2/2 + \beta b_n.$$

Cela montre au même temps que la stratégie optimale est de la forme souhaitée avec

$$k_{n+1} = -\, \beta a_n \lambda / (1 + \beta\, a_n).$$