Examen

[Durée deux heures. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont independants. Seule les reponses soigneusement justifiées seront prise en compte.]

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov homogène sur l'espace d'états $M=\mathbb{N}$ de matrice de transition

$$P(0,1)=1, \qquad P(x,x+1)=1-P(x,x-1)=p \quad \text{pour } x\geqslant 1$$

avec $p\in]0,1[$. On pose $q=1-p$.

a) Calculer $\mathbb{P}_0(X_4=2)$.

b) Montrer que la chaîne est irréductible.

c) Est-elle fortement irréductible ?

d) Est-elle apériodique ?

e) Montrer qu'une mesure invariante pour P est donnée par

$$\mu(0)=1, \qquad \mu(x)=\frac{1}{p}\left(\frac{p}{q}\right)^x \qquad \text{pour tout } x\geqslant 1.$$

f) Déterminer les valeurs de p pour lesquels la chaîne admet une probabilité invariante π et montrer que dans ce cas P est réversible par rapport à π et que π est la seule probabilité invariante.

g) Soit $T_0=\inf\{n>0: X_n=0\}$. En supposant que la chaîne est récurrente positive calculer le temps moyen de retour à l'état 0 (c-à-d $\mathbb{E}_0[T_0]$) en fonction de p. En déduire que si $p\geqslant 1/2$ alors la chaîne n'est pas récurrente positive.

h) Soit $S_x=\inf\{n\geqslant 0: X_n=x\}$ et $u_N(x)=\mathbb{P}_x(S_0<S_N)$ pour $0\leqslant x\leqslant N$. Trouver l'équation satisfaite par $u_N(x)$ et montrer que u_N est donnée par

$$u_N(0)=1, \qquad u_N(x)=1-\frac{\sum_{k=0}^{x-1}(q/p)^k}{\sum_{k=0}^{N-1}(q/p)^k}, \quad 0<x\leqslant N.$$

i) Montrer que $\mathbb{P}_0(T_0<+\infty)\geqslant u_N(1)$ pour tout $N\geqslant 1$. Calculer $\limsup_N u_N(1)$ et en déduire que si $p\leqslant 1/2$ alors la chaîne est recurrente.

Exercice 2. Soient définies des v.a. indépendantes X, ξ_1, ξ_2, ... telles que $X\sim\mathcal{N}(0,1)$ et $\xi_n\sim\mathcal{N}(0,\varepsilon_n^2)$ avec $\varepsilon_n>0$ pour tout $n\geqslant 1$. Soit $Y_n=X+\xi_n$ et

$$X_n=\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n], \qquad n\geqslant 1$$

avec $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$. On peut voir X comme une quantité inconnue qu'on cherche à estimer. La v.a. Y_n est le résultat obtenu en mesurant X au temps n, la mesure étant brouillée par une erreur aléatoire. On suppose que les erreurs commises en temps différents sont indépendantes. Au temps n, notre meilleure estimation L^2 de X est donnée par X_n. On se pose la question de savoir si X_n converge vers X quand $n \to \infty$.

a) Montrer que le processus $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une martingale uniformement bornée dans L^2 (c-à-d $\sup_n \mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$)

b) Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers une variable X_∞ et que $X_\infty \in L^2$. La v.a. X_∞ représente notre meilleure prévision de X (au sens L^2) donnée par l'observation de toutes les v.a. $(Y_n)_{n\geqslant 1}$.

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $1 \leqslant i \leqslant n$ on a $\mathbb{E}[Z_n Y_i] = 0$ où la v.a. Z_n est définie par

$$Z_n = X - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2} Y_k .$$

d) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$ la v.a. Z_n est indépendante du vecteur $(Y_1, ..., Y_n)$ puis que $X_n = X - Z_n$.

e) Calculer $\mathbb{E}[(X - X_n)^2]$ et en deduire que $X_n \to X$ presque surement si et seulement si

$$\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n^{-2} = +\infty.$$

Donc si $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n^{-2} < +\infty$ il est impossible de déterminer la quantité inconnue X même avec un nombre infini d'observations.