Examen

[Durée deux heures. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont independants. Seules les reponses soigneusement justifiées seront prises en compte.]

Exercice 1. On lance un dé de manière répétée. Parmi les suites aléatoires suivantes, lesquelles sont des chaînes de Markov (donner une justification, éventuellement en français)? En cas de réponse positive, donner la matrice de transition correspondante.

a) X_n : le plus grand résultat impair obtenu après n lancers (on pose $X_n = 0$ si aucun résultat impair n'a été obtenu au temps n).

b) N_n : le nombre de résultats pairs obtenus au bout de n lancers.

c) M_n : le nombre de fois qu'on a obtenu deux 6 consécutifs au bout de n lancers.

d) C_n : nombre de lancers, à l'instant n, depuis le dernier nombre pair.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la chaîne de Markov sur $\mathcal{M}=\{1,2,3,4,5\}$ de matrice de transition

$$P=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

a) Dessiner le graphe associé à cette matrice de transition.

b) Déterminer les classes de communication et classifier les états en transients ou récurrents.

c) La chaîne est-elle irréductible?

d) Soit $T_x = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n = x\}$. Calculer $\mathbb{P}(T_5 = n | X_0 = 1)$ pour tout $n \geqslant 1$ et $\mathbb{P}(T_3 < T_5 | X_0 = 1)$.

e) Déterminer les probabilités invariantes de la chaîne.

f) Soit $S = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n = 3 \text{ ou } X_n = 5\}$ et $u(x) = \mathbb{E}_x[S]$ pour tout $x \in \mathcal{M}$. Déterminer l'équation linéaire satisfaite par u.

Exercice 3. Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid de loi $\mathbb{P}(U_n = \pm 1) = 1/2$. Soit $X_0 = 1$, $X_{n+1} = (1 - U_{n+1})X_n$. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ la filtration engendrée par les $(U_n)_{n\geqslant 1}$ (avec $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$).

a) Montrer que le processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} X_n = X_\infty$ existe presque sûrement.

c) Montrer que $Y_n = \sqrt{X_n}$ est une sur-martingale.

d) Calculer $\mathbb{E}[Y_n]$ et en déduire que $X_\infty = 0$ p.s.

e) Montrer que la martingale $(X_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas dans L^1.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite iid de loi $\mathbb{P}(X_n = \pm 1) = 1/2$ adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ et $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec $Y_0 = 0$. Soit $T = \inf\{n \geqslant 0 : Y_n \geqslant 10\}$.

a) Montrer que T est un temps d'arrêt.

b) Montrer que le processus arrête $Z_n = Y_{n\wedge T}$ satisfait $Z_n \leqslant 10$ pour tout $n \geqslant 0$ et qu'il converge p.s. vers $Z_\infty = 10$.

c) En déduire que $T < \infty$ p.s.

d) Montrer que $\mathbb{E}[T] = +\infty$.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus adapté et intégrable. Pour tout processus borné et previsible $(H_n)_{n\geqslant 1}$ on définit

$$(H\cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1}).$$

Montrer que si $\mathbb{E}[(H\cdot X)_k] = 0$ pour tout processus $(H_n)_{n\geqslant 1}$ prévisible et borné et tout $k \geqslant 1$, alors $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.