Partiel

[Durée une heure et demi. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont independantes. Seule les reponses soigneusement justifiées seront prise en compte.]

Exercice 1. On considère deux v.a. X, Y telles que $\mathbb{P}(Y \geqslant k) = p^k$ pour tout $k \geqslant 0$ et

$$\mathbb{E}[1_{X \geqslant t}|Y] = e^{-Yt} 1_{t \geqslant 0}.$$

a) Montrer que X est une v.a. continue et calculer sa densité de probabilité f_X.

b) Calculer $\mathbb{P}(Y = k|X \geqslant t)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 0$.

Exercice 2. Montrer que le processus $(X_n)_{n \geqslant 0}$ à valeurs sur l'espace discret $\mathcal{M}$ est une chaîne de Markov homogène avec matrice de transition P si et seulement si, presque sûrement

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n, ..., X_0] = (Pf)(X_n)$$

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ le processus stochastique à valeurs sur $\mathbb{N}$ donnée par

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 & \text{si } X_n > 0 \\ U_{K_n} & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

où $(U_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite iid à valeurs sur $\mathbb{N}$ et de loi $\nu(x) = \mathbb{P}(U_1 = x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ et $K_n = \text{card}\{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n \text{ et } X_k = 0\}$ est le nombre de zéros dans la suite $(X_0, ..., X_n)$. Soit $T_y = \inf \{n \geqslant 0 : X_n = y\}$.

a) Montrer que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P donnée par

$$P(x+1, x) = 1 \qquad \text{et} \quad P(0, x) = \nu(x) \qquad \forall x \in \mathbb{N}.$$

b) La chaîne est-elle irréductible? Soit $S_0 = \inf \{n > 0 : X_n = 0\}$. Calculer $\mathbb{P}_0(S_0 = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que 0 est un état récurrent et que $\mathbb{P}_x(T_y < +\infty) = 1$ pour tout x, $y \in \mathbb{N}$.

c) Soit $\varphi_{x,y}(t) = \mathbb{E}_x[t^{T_y}]$ pour tout $t \in]0, 1]$. Montrer que $\mathbb{E}_x[T_y] = \lim_{t \nearrow 1-} \varphi'_{x,y}(t)$ (limite pour t que tends à 1 de façon croissante) où $\varphi'_{x,y}(t) = \mathrm{d}\varphi_{x,y}(t)/\mathrm{dt}$.

d) Montrer que $\varphi_{x,y}(t) = t\, \varphi_{x-1,y}(t)$ si $x \neq y$ et $x > 0$ et calculer $\varphi_{x,y}(t)$ pour $x \geqslant y$.

e) Montrer que, pour tout $y > 0$

$$\varphi_{0,y}(t) = \frac{\sum_{z \geqslant y} \nu(z) t^{z+1-y}}{1 - \sum_{z < y} \nu(z) t^{z+1}}.$$

f) Donner une formule pour $\mathbb{E}_x[T_y]$.

g) Soit $\mu(x) = \mathbb{P}(U_1 \geqslant x)$. Montrer que μ est une mesure invariante pour P et décrire l'ensemble de toutes les mesures invariantes pour P.

h) Montrer que P admet une unique probabilité invariante π si et seulement si $\mathbb{E}[U_1] < +\infty$.

i) Vérifier que si U_1 est intégrable on a $\pi(0) = 1/\mathbb{E}_0[S_0]$.

j) Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\mathbb{E}_x[S_x] = x + \mathbb{E}_0[T_x]$ et vérifier que si U_1 est intégrable alors $\pi(x) = 1/\mathbb{E}_x[S_x]$ pour tout $x \geqslant 0$.