Partiel

[Durée deux heures. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont independantes. Seule les reponses soigneusement justifiées seront prises en compte.]

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité fixé et muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$. Sauf indication explicite tout processus adapté ou martingale sont réfères à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 1.

a) Soit X une v.a. positive et intégrable et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}(X \geqslant a|\mathcal{G}) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]}{a}.$$

b) Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculer $\mathbb{E}[X^3|X^2]$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et A un événement tel que $A \notin \mathcal{G}$. Soit $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{G}, A)$ c-à-d la plus petite tribu qui contienne $\mathcal{G}$ et $\sigma(A) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$. On admettra que tout $Z \hat{\in} \mathcal{H}$ s'écrit dans la forme $Z = Y_1 \mathbb{I}_A + Y_2 \mathbb{I}_{A^c}$ où Y_1, Y_2 sont des v.a. $\mathcal{G}$-mesurables. Montrer que, pour tout $X \in L^1(\mathcal{F})$:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = \frac{\mathbb{E}[X\,\mathbb{I}_A|\mathcal{G}]}{\mathbb{E}[\mathbb{I}_A|\mathcal{G}]}\mathbb{I}_A + \frac{\mathbb{E}[X\,\mathbb{I}_{A^c}|\mathcal{G}]}{\mathbb{E}[\mathbb{I}_{A^c}|\mathcal{G}]}\mathbb{I}_{A^c}.$$

Par simplicité on peut supposer que $0 < \mathbb{E}[\mathbb{I}_A|\mathcal{G}] < 1$ p.s.

Exercice 3.

a) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid avec $\mathbb{E}[X_n] = 0$ et $\mathbb{E}[X_n^2] = c < +\infty$. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $(S_n^2 - c\,n)_{n\geqslant 1}$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle des $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

b) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes, intégrables et de moyenne nulle. Montrer que le processus $M_n = \sum_{k=1}^n X_1 \cdots X_k$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle des $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

c) Montrer que si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux sous-martingales et si $Z_n = \max(X_n, Y_n)$ alors $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ est une sous-martingale.

d) Soit $T: \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ un temps d'arrêt et $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus adapté. Soit $X_n^T = X_{n\wedge T}$ le processus arrêté en T. Montrer qu'il existe un processus prévisible et positif $(H_n)_{n\geqslant 1}$ tel que

$$X_n^T = X_0 + (H\cdot X)_n = X_0 + \sum_{k=1}^n H_k \Delta X_k \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

Exercice 4.

a) Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus adapté à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $T = \inf\{n \geqslant 0 : X_n \geqslant 10\}$ est un temps d'arrêt.

b) Montrer que si $(T_n\colon \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\})_{n \geqslant 1}$ est une suite de temps d'arrêt alors la variable aléatoire $T = \sup_{n \geqslant 1} T_n$ est un temps d'arrêt.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite iid de v.a. de loi $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = +1) = 1/2$. On considère la marche aléatoire simple $S_n = 1 + X_1 + \cdots + X_n$ qui démarre de 1 et $T = \inf \{n \geqslant 0\colon S_n = 0\}$ le premier temps d'atteinte de 0. Le but de l'exercice est de montrer que T est fini p.s. mais non intégrable.

a) Soit $(S_n^T)_{n \geqslant 0}$ le processus arrêté en T. Montrer que $(S_n^T)_{n \geqslant 0}$ converge p.s.

b) En déduire que T est fini p.s. (indication: montrer que $S_n^T - S_{n+1}^T$ tend vers 0 p.s.)

c) La suite $(S_n^T)_{n \geqslant 0}$ converge-t-elle dans L^1?

d) Montrer que T n'est pas intégrable (indication: raisonner par l'absurde)

Exercice 6. Soient $(X_n)_{n \geqslant 0}$ et $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ deux martingales et T un temps d'arrêt fini p.s. On définit le processus $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ par

$$Z_n = X_n \mathbb{I}_{n \leqslant T} + Y_n \mathbb{I}_{n > T}$$

a) Montrer que si $X_T = Y_T$ p.s alors $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale.

b) Montrer que si $\mathbb{P}(X_T = Y_T) < 1$ alors il existe $n \geqslant 0$ tel que $\mathbb{P}(X_n < Y_n, T = n) > 0$ ou $\mathbb{P}(X_n > Y_n, T = n) > 0$.

c) En déduire que si $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale alors $X_T = Y_T$ p.s.