Corrigé du Partiel

[Durée une heure et demi. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont independantes. Seule les reponses soigneusement justifiées seront prise en compte.]

Exercice 1. On considère deux v.a. X, Y telles que $Y\colon \Omega \to \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(Y \geqslant k) = p^{k-1}$ pour tout $k \geqslant 1$ et

$$\mathbb{E}[1_{X \geqslant t}|Y] = e^{-Yt} \qquad \text{pour } t \geqslant 0$$

a) Montrer que X est une v.a. continue et calculer sa densité de probabilité f_X.

b) Calculer $\mathbb{P}(Y = k|X \geqslant t)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 0$.

Solution. a) On a $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y > k) - \mathbb{P}(Y > k+1) = (1-p)p^{k-1}$ pour $k \geqslant 1$, alors

$$\mathbb{P}(X \geqslant t) = \mathbb{E}[1_{X \geqslant t}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[1_{X \geqslant t}|Y]] = \mathbb{E}[e^{-Yt}] = \sum_{k \geqslant 1} e^{-kt} p^{k-1}(1-p) = \frac{e^{-t}(1-p)}{1 - p\,e^{-t}}$$

La fonction de répartition étant continue (en effet C^1 par morceaux), la v.a. est une v.a. continue et sa densité est donné par

$$f_X(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(X \geqslant t) = \frac{(1-p)e^{-t}}{(1 - p\,e^{-t})^2} \qquad t \geqslant 0$$

b)

$$\mathbb{P}(Y = k|X \geqslant t) = \frac{\mathbb{E}[1_{Y = k, X \geqslant t}]}{\mathbb{E}[1_{X \geqslant t}]} = (e^{-t}p)^{k-1}(1 - p\,e^{-t}).$$

Exercice 2. Montrer que le processus $(X_n)_{n \geqslant 0}$ à valeurs sur l'espace discret $\mathcal{M}$ est une chaîne de Markov homogène avec matrice de transition P si et seulement si, presque sûrement

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n, \ldots, X_0] = (Pf)(X_n)$$

Solution. Si $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov alors

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = P(x_n, x_{n+1}).$$

La définition de l'espérance conditionnelle donne

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1}) g(X_n, \ldots, X_0)]$$

$$= \sum_{x_0, \ldots, x_{n+1}} f(x_{n+1}) g(x_n, \ldots, x_0) \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n) \mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0)$$

$$= \sum_{x_0, \ldots, x_{n+1}} f(x_{n+1}) g(x_n, \ldots, x_0) P(x_{n+1}, x_n) \mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0)$$

$$= \sum_{x_0, \ldots, x_n} Pf(x_n) g(x_n, \ldots, x_0) \mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0)$$

$$= \mathbb{E}[Pf(X_n) g(X_n, \ldots, X_0)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n, \ldots, X_0] g(X_n, \ldots, X_0)].$$

Etant ça vrai pour n'importe quelle g mesurable et bornée on a que

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n, ..., X_0] = (Pf)(X_n), \qquad p.s..$$

D'autre part si la formule avec l'espérance conditionnelle est vrai on a que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_0 = x_0) = \mathbb{E}[1_{X_{n+1} = x_{n+1}} 1_{X_n = x_n} \cdots 1_{X_0 = x_0}]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[1_{X_{n+1} = x_{n+1}}|X_n, ..., X_0] 1_{X_n = x_n} \cdots 1_{X_0 = x_0}] = \mathbb{E}[P(X_n, x_{n+1}) 1_{X_n = x_n} \cdots 1_{X_0 = x_0}]$$

$$= P(x_n, x_{n+1}) \mathbb{E}[1_{X_n = x_n} \cdots 1_{X_0 = x_0}]$$

et donc

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_n | X_n = x_n, ..., X_0 = x_0) = \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, ..., X_0 = x_0)}{\mathbb{P}(X_n = x_n, ..., X_0 = x_0)} = P(x_n, x_{n+1}).$$

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ le processus stochastique à valeurs sur $\mathbb{N}$ donnée par

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 & \text{si } X_n > 0 \\ U_{K_n} & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

où $(U_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite iid à valeurs sur $\mathbb{N}$ et de loi $\nu(x) = \mathbb{P}(U_1 = x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ et $K_n = \text{card}\{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n \text{ et } X_k = 0\}$ est le nombre de zéros dans la suite $(X_0, ..., X_n)$. Soit $T_y = \inf \{n \geqslant 0 : X_n = y\}$.

a) Montrer que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P donnée par

$$P(x+1, x) = 1 \qquad \text{et} \quad P(0, x) = \nu(x) \qquad \forall x \in \mathbb{N}.$$

b) La chaîne est-elle irréductible? Soit $S_0 = \inf \{n > 0 : X_n = 0\}$. Calculer $\mathbb{P}_0(S_0 = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que 0 est un état récurrent et que $\mathbb{P}_x(T_y < +\infty) = 1$ pour tout x, $y \in \mathbb{N}$.

c) Soit $\varphi_{x,y}(t) = \mathbb{E}_x[t^{T_y}]$ pour tout $t \in]0, 1]$. Montrer que $\mathbb{E}_x[T_y] = \lim_{t \nearrow 1-} \varphi'_{x,y}(t)$ (limite pour t que tends à 1 de façon croissante) où $\varphi'_{x,y}(t) = \mathrm{d}\varphi_{x,y}(t)/\mathrm{dt}$.

d) Montrer que $\varphi_{x,y}(t) = t\, \varphi_{x-1,y}(t)$ si $x \neq y$ et $x > 0$ et calculer $\varphi_{x,y}(t)$ pour $x \geqslant y$.

e) Montrer que, pour tout $y > 0$

$$\varphi_{0,y}(t) = \frac{\sum_{z \geqslant y} \nu(z) t^{z+1-y}}{1 - \sum_{z < y} \nu(z) t^{z+1}}.$$

f) Donner une formule pour $\mathbb{E}_x[T_y]$.

g) Soit $\mu(x) = \mathbb{P}(U_1 \geqslant x)$. Montrer que μ est une mesure invariante pour P et décrire l'ensemble de toutes les mesures invariantes pour P.

h) Montrer que P admet une unique probabilité invariante π si et seulement si $\mathbb{E}[U_1] < +\infty$.

i) Vérifier que si U_1 est intégrable on a $\pi(0) = 1/\mathbb{E}_0[S_0]$.

j) Montrer que pour tout $x>0$ on a $\mathbb{E}_x[S_x]=x+\mathbb{E}_0[T_x]$ et vérifier que si U_1 est intégrable alors $\pi(x)=1/\mathbb{E}_x[S_x]$ pour tout $x\geqslant 0$.

Solution. a) La probabilité $\mathbb{P}(X_n=x_n, \ldots, X_0=x_0)$ est non-nulle si et seulement si le vecteur $(x_0, \ldots, x_n)$ est tel que $x_k>0 \Rightarrow x_{k+1}=x_k-1$ pour tout $0\leqslant k<n$. Dans ce cas, si $x_n>0$ on a que

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}, X_n=x_n, \ldots, X_0=x_0)=1_{x_n=x_{n+1}+1}$$

Si $x_n=0$ on considère le nombre $m=\operatorname{card}\{k\in\mathbb{N}: k\leqslant n, x_k=0\}$ de zéros dans les premiers n éléments de la suite. Soient $i_1, \ldots, i_m$ leur positions (c-à-d $x_{i_k}=0$ pour tout $1\leqslant k\leqslant m$). Evidemment $i_m=n$ car on suppose que $x_n=0$. Alors

$$\{X_{n+1}=x_{n+1}, \ldots, X_0=x_0\}=\{X_0=x_0, U_1=x_{i_1+1}, \ldots, U_{m-1}=x_{i_{m-1}+1}, U_m=x_{n+1}\}$$

et aussi

$$\{X_n=x_n, \ldots, X_0=x_0\}=\{X_0=x_0, U_1=x_{i_1+1}, \ldots, U_{m-1}=x_{i_{m-1}+1}\}$$

car connaître les position $i_1, \ldots, i_m$ des m zéros et la taille des « sauts » $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ permet de reconstruire sans ambiguïté toute la suite $X_0, \ldots, X_n$. Donc

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}|X_n=x_n, \ldots, X_0=x_0)=\frac{\mathbb{P}(X_0=x_0, U_1=x_{i_1+1}, \ldots, U_{m-1}=x_{i_{m-1}+1}, U_m=x_{n+1})}{\mathbb{P}(X_0=x_0, U_1=x_{i_1+1}, \ldots, U_{m-1}=x_{i_{m-1}+1})}$$

$$=\frac{\mathbb{P}(X_0=x_0, U_1=x_{i_1+1}, \ldots, U_{m-1}=x_{i_{m-1}+1})\mathbb{P}(U_m=x_{n+1})}{\mathbb{P}(X_0=x_0, U_1=x_{i_1+1}, \ldots, U_{m-1}=x_{i_{m-1}+1})}=\mathbb{P}(U_m=x_{n+1})=\nu(x_{n+1})$$

par indépendance de U_m par rapport à $(X_0, U_1, \ldots, U_{m-1})$. Cela montre que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov avec matrice de transition annoncé.

b) Il est clair que si $x\geqslant y$ alors $P^{y-x}(x,y)=1$ et donc $x\to y$. Au même temps $P(0,y)=\nu(y)>0$ et donc $0\to y$ pour tout $y\in\mathbb{N}$. Cela implique que $x\to y$ pour tout $x<y$ car $P^{x+1}(x,y)=P^x(x,0)P(0,y)=\nu(y)>0$. On a donc $x\leftrightarrow y$ pour tout $x,y\in\mathbb{N}$ et la chaîne est irréductible. De plus

$$\mathbb{P}_0(S_0=k)=\mathbb{P}_0(X_1=k)=\nu(k)$$

et donc $\mathbb{P}_0(S_0<+\infty)=\sum_{k=0}^{\infty}\nu(k)=1$ ce qui montre que 0 est un état récurrent et donc que la chaîne est elle même récurrente (car irréductible). Si $x\geqslant y\geqslant 0$ alors $\mathbb{P}_x(T_y<+\infty)=\mathbb{P}_x(T_y<+\infty, X_{y-x}=y)=1$ car $\mathbb{P}_x(X_{y-x}=y)=1$. Si $x<y$ alors par récurrence de y on a $\mathbb{P}_y(T_y<+\infty)=1$ mais aussi $1=\mathbb{P}_y(T_y<+\infty)=\mathbb{P}_y(T_y<+\infty, X_{y-x}=x)=\mathbb{P}_x(T_y-(y-x)<+\infty)=\mathbb{P}_x(T_y<+\infty)$ où on a utilisé la propriété de Markov dans la deuxième égalité.

c) En dérivant on a que

$$\varphi_{x,y}(t)=\mathbb{E}_x[t^{T_y}]=\sum_{k\geqslant 0} t^k\mathbb{P}_x(T_y=k) \qquad \varphi_{x,y}'(t)=\sum_{k\geqslant 1} k\,t^{k-1}\mathbb{P}_x(T_y=k)$$

et par convergence monotone quand $t\nearrow 1-$ on obtient

$$\lim_{t\nearrow 1-}\varphi_{x,y}'(t)=\lim_{t\nearrow 1-}\sum_{k\geqslant 1} k\,t^{k-1}\mathbb{P}_x(T_y=k)=\sum_{k\geqslant 1} k\,\mathbb{P}_x(T_y=k)=\mathbb{E}_x[T_y].$$

d) Si $x \neq y$ et $x > 0$ on a que

$$\mathbb{E}_x[t^{T_y}] = \sum_{k \geqslant 1} t^k \mathbb{P}_x(X_1 = x-1, T_y = k) = \sum_{k \geqslant 0} t^k \mathbb{P}_{x-1}(X_0 \neq y, ..., X_{k-1} \neq y, X_{k-1} = y)$$

$$= \sum_{k \geqslant 1} t^k \mathbb{P}_{x-1}(T_y = k-1)$$

$$= \mathbb{E}_{x-1}[t^{T_y+1}] = t\,\varphi_{x-1,y}(t).$$

Par récurrence on a: $\varphi_{x,y}(t) = t^{x-y}\varphi_{y,y}(t) = t^{x-y}$ car $\varphi_{y,y}(t) = 1$.

e) Par Markov on a

$$\varphi_{0,y}(t) = \sum_{k \geqslant 1} t^k \mathbb{P}_0(X_1 = U_1, X_1 \neq y, ..., X_{k-1} \neq y, X_k = y)$$

$$= \sum_{k \geqslant 1} t^k \sum_{z \geqslant 0} \mathbb{P}(U_1 = z) \mathbb{P}_z(X_0 \neq y, ..., X_{k-2} \neq y, X_{k-1} = y)$$

$$= \sum_{z \geqslant 0} \mathbb{P}(U_1 = z) \sum_{k \geqslant 1} t^k \mathbb{P}_z(X_0 \neq y, ..., X_{k-2} \neq y, X_{k-1} = y)$$

$$= t \sum_{z \geqslant 0} \mathbb{P}(U_1 = z)\varphi_{z,y}(t) = t \sum_{z \geqslant y} \mathbb{P}(U_1 = z)\varphi_{z,y}(t) + t \sum_{z < y} \mathbb{P}(U_1 = z)\varphi_{z,y}(t)$$

$$= \sum_{z \geqslant y} \mathbb{P}(U_1 = z) t^{z+1-y} + \varphi_{0,y}(t) \sum_{z < y} \mathbb{P}(U_1 = z) t^{z+1}$$

et donc

$$\varphi_{0,y}(t) = \frac{\sum_{z \geqslant y} \nu(z) t^{z+1-y}}{1 - \sum_{z < y} \nu(z) t^{z+1}}$$

f)

$$\varphi'_{0,y}(t) = \frac{\sum_{z \geqslant y} (z+1-y)\nu(z) t^{z-y}}{1 - \sum_{z < y} \nu(z) t^{z+1}} + \frac{(\sum_{z \geqslant y} \nu(z) t^{z+1-y})(\sum_{z < y} (z+1)\nu(z) t^z)}{(1 - \sum_{z < y} \nu(z) t^{z+1})^2}$$

$$\mathbb{E}_0[T_y] = \varphi'_{0,y}(1-) = \frac{\sum_{z \geqslant y} (z+1-y)\nu(z) + \sum_{z < y} (z+1)\nu(z)}{\sum_{z \geqslant y} \nu(z)} = \frac{\sum_{z \geqslant 0} (z+1)\nu(z)}{\sum_{z \geqslant y} \nu(z)} - y$$

Si $x \geqslant y$ on a $\mathbb{E}_x[T_y] = x - y$ et si $0 \leqslant x < y$ on a $\varphi_{x,y}(t) = \varphi_{x,0}(t)\varphi_{0,y}(t)$ ce qui donne en dérivant que $\mathbb{E}_x[T_y] = \mathbb{E}_x[T_0] + \mathbb{E}_0[T_y]$ et donc que

$$\mathbb{E}_x[T_y] = x - y + \frac{\sum_{z \geqslant 0} (z+1)\nu(z)}{\sum_{z \geqslant y} \nu(z)} = x - y + \frac{\mathbb{E}[U_1 + 1]}{\mathbb{P}(U_1 \geqslant y)}$$

g) On a $\mu(x) = \sum_{z \geqslant x} \nu(z)$ et donc

$$\mu P(x) = \sum_z P(z,x) \sum_{k=z}^{\infty} \nu(k) = P(0,x) \sum_{k=0}^{\infty} \nu(k) + P(x+1,x) \sum_{k=x+1}^{\infty} \nu(k)$$

$$= \nu(x) + \sum_{k=x+1}^{\infty} \nu(k) = \mu(x)$$

Par irréductibilité, toute mesure invariante θ doit être un multiple de μ : $\theta(x) = c\mu(x)$.

h) La mesure μ est normalizable si et seulement si

$$Z = \sum_{x \geqslant 0} \mu(x) = \sum_{x \geqslant 0} \sum_{k \geqslant x} \nu(k) = \sum_{k \geqslant 0} \sum_{0 \leqslant x \leqslant k} \nu(k) = \sum_{k \geqslant 0} (k+1)\nu(k) = \mathbb{E}[U_1] + 1 < +\infty$$

et alors $\pi(x) = \mu(x)/Z$ est une probabilité invariante pour P et par l'irréductibilité de P elle est la seule.

i) On a

$$\mathbb{E}_0[S_0] = 1 + \sum_{z \geqslant 0} \nu(z)\mathbb{E}_z[T_0] = 1 + \sum_{z \geqslant 0} \nu(z)z = 1 + \mathbb{E}[U_1]$$

et donc

$$\pi(0) = \frac{\mu(0)}{1 + \mathbb{E}[U_1]} = \frac{1}{\mathbb{E}_0[S_0]}$$

j) En général pour tout $x > 0$

$$\pi(x) = \frac{\mu(x)}{1 + \mathbb{E}[U_1]} = \frac{\sum_{k \geqslant x} \nu(x)}{\sum_{k \geqslant 0} (k+1)\, \nu(k)}$$

et

$$\mathbb{E}_x[S_x] = 1 + \mathbb{E}_{x-1}[T_x] = x + \mathbb{E}_0[T_x] = \frac{\sum_{z \geqslant 0} (z+1)\nu(z)}{\sum_{z \geqslant x} \nu(z)} = \frac{1}{\pi(x)}.$$