MIDO M1 MMD   Université Paris-Dauphine 12/13
Processus discrets   `[v.1 20120925]`

TD1. Espérance conditionnelle.

Exercice 1 Soient X une v.a. intégrable définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

1. Rappeler la définition de $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$.
2. Compléter les égalités suivantes :
   a) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) =$
   b) Si X et $\mathcal{B}$ sont indépendantes, $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})=$
   c) Si Y est une v.a. $\mathcal{B}$-mesurable et si XY et X sont intégrables, $\mathbb{E}(YX|\mathcal{B})=$
   d) Pour toute v.a. Z $\mathcal{B}$-mesurable et bornée, $\mathbb{E}(Z\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) =$

Exercice 2 Soit $\{A_1, A_2, \ldots\}$ une partition (finie ou infinie) de Ω. Soit $\mathcal{B} = \sigma(A_1, \ldots)$ la tribu engendrée par cette partition.

a) Décrire la tribu $\sigma(A_1)$ et $\sigma(\{A_1, A_2\})$
b) Décrire la tribu $\mathcal{B}$
c) Donner la forme generale d'une v.a. Z qui est mesurable par rapport à $\mathcal{B}$
d) Montrer que

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B})(\omega) = \sum_{j:\mathbb{P}(A_j)>0} \frac{\mathbb{E}(X1_{A_j})}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j}(\omega).$$

Exercice 3 Soient (X, Y) une couple des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ avec densité jointe $f_{X,Y}(x, y)$. Montrer que $\mathbb{E}[g(Y)|X] = h(X)$ où h est n'importe quelle fonction telle que

$$h(x) \int_{\mathbb{R}^m} f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^m} g(y) f_{X,Y}(x, y)\mathrm{d}y.$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 4

a) Soit $Z \sim \mathcal{E}(1)$ une v.a. exponentielle de paramètre 1 et $t > 0$. Soit $X = \min(Z, t)$ et $Y = \max(Z, t)$. Calculer $\mathbb{E}[Z|X]$ et $\mathbb{E}[Z|Y]$.
b) Soit X, Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim Y \sim \mathcal{U}([0, 1])$ Soit $Z = XY$. Calculer $\mathbb{E}[X|Z]$ et $\mathbb{E}[Y|Z]$.

Exercice 5 Soit X une v.a. intégrable définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$, $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$. Montrer que

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1) \quad \text{et que} \quad \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)|\mathcal{B}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1).$$

Exercice 6 Un modèle discret d'évolution d'actifs. Soit S_0 une constante, $0 < d < u$ et X_n une suite iid à valeurs dans $\{u, d\}$ telle que $\mathbb{P}(X_n = u) = p$. On considère la suite S_n, $n \geqslant 1$ définie par $S_n = X_n S_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ qui est un modèle d'évolution d'un actif financier. Soit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(X_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(X_1, X_2)$.

1. Montrer que $\sigma(S_2) \neq \sigma(X_1, X_2)$.
2. Calculer $\mathbb{E}[S_2|\mathcal{F}_1]$ et $\mathbb{E}[S_2|\mathcal{F}_0]$ et vérifier que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[S_2|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[S_2]$.
3. Si $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ donner une formule pour $\mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_k]$ pour tout $k \leqslant n$.

Exercice 7 Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires iid intégrables. Calculer

$$\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2 + \ldots + X_n).$$

Exercice 8 Soient X_1, X_2 deux v.a. indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_i > t) = e^{-t}$, $\forall t > 0$. On pose $Y = X_1 + X_2$ et on considère une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. Calculer $\mathbb{E}(f(X_1)|Y)$.

Exercice 9 Soit X une v.a. telle que $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. On pose $\mathrm{Var}(X|\mathcal{F}) \equiv \mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})^2$. Montrer que

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(\mathrm{Var}(X|\mathcal{F})\right) + \mathrm{Var}\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\right).$$

Exercice 10 Soit X une v.a. de loi $\mathcal{B}(a, b)$, $a, b > 0$ et, conditionnellement à X, soit Y une v.a. binomiale de paramètres (n, X) . Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 11 (Formule de Bayes) Montrer que si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $A \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$ on a

$$\mathbb{P}(G|A) = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{P}(A|\mathcal{G})1_G]}{\mathbb{E}[\mathbb{P}(A|\mathcal{G})]}.$$

Exercice 12 On considère deux v.a. X, Y : X est uniforme sur l'ensemble $\{1, \dots, 6\}$ et conditionnellement à X la v.a. Y a une loi $\mathrm{Bin}(X, 1/2)$. Calculer $\mathbb{P}(X = i|Y = 0)$ pour $i = 1, \dots, 6$.

Exercice 13

a) Soit X une v.a. positive et intégrable et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}(X \geqslant a|\mathcal{G}) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]}{a}.$$

b) Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Calculer $\mathbb{E}[X^3|X^2]$.

Exercice 14 Soit $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ un vecteur Gaussien de moyenne nulle et matrice de covariance $\Gamma = (\Gamma_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X_0|X_1, \dots, X_n] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \quad p.s.$$

et déterminer les poids λ_i en fonction de Γ.

Exercice 15 Soit $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et A un événement tel que $A \notin \mathcal{G}$. Soit $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{G}, A)$ c-à-d la plus petite tribu qui contienne $\mathcal{G}$ et $\sigma(A) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$. On admettra que tout $Z \hat{\in} \mathcal{H}$ s'écrit dans la forme $Z = Y_1 \mathbb{I}_A + Y_2 \mathbb{I}_{A^c}$ où Y_1, Y_2 sont des v.a. $\mathcal{G}$-mesurables. Montrer que, pour tout $X \in L^1(\mathcal{F})$:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{I}_A|\mathcal{G}]}{\mathbb{E}[\mathbb{I}_A|\mathcal{G}]}\mathbb{I}_A + \frac{\mathbb{E}[X\mathbb{I}_{A^c}|\mathcal{G}]}{\mathbb{E}[\mathbb{I}_{A^c}|\mathcal{G}]}\mathbb{I}_{A^c}.$$

Par simplicité on peut supposer que $0 < \mathbb{E}[\mathbb{I}_A|\mathcal{G}] < 1$ p.s.

Exercice 16 Montrer que si $X_1 = X_2$ sur $B \in \mathcal{F}$ (c.-à.-d. $X_1(\omega) = X_2(\omega)$ si $\omega \in B$), alors $\mathbb{E}[X_1|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X_2|\mathcal{F}]$ sur $B \in \mathcal{F}$.