TD2. Martingales, strategies et arrêt optionnel.

Exercice 1. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$ une filtration.

a) Soient S, T des temps d'arrêt, montrer que $T \wedge S$ et $T \vee S$ sont des temps d'arrêt.

b) Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ un processus adapté et B un Borélien, montrer que le temps d'atteinte de B

$$T = \inf \{n \geqslant 0 \colon X_n \in B\}$$

est un temps d'arrêt.

c) Soit $(X_n)_{n \geqslant 0}$ un processus adapté et $Y_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} (X_n)$. Montrer que $T = \inf \{n \geqslant 1 \colon X_n \geqslant Y_{n-1}\}$ est un temps d'arrêt et que $Y_T = X_T$ sur l'evenement $\{T < +\infty\}$.

d) Soient T, S deux temps d'arrêt, montrer que $U = T + S$ est un temps d'arrêt.

e) Montrer que si $(T_n \colon \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\})_{n \geqslant 1}$ est une suite de temps d'arrêt alors la variable aléatoire $T = \inf_{n \geqslant 1} T_n$ est un temps d'arrêt.

Exercice 2. Soit $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de v.a. i.i.d. avec $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p = 1 - P(Y_i = -1)$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ (et $S_0 = 0$). Montrer que les processus $(W_n)_{n \geqslant 0}$ et $(M_n)_{n \geqslant 0}$ définis par

$$W_n = S_n - (2p - 1)\, n,$$

et

$$M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n},$$

sont des martingales par rapport à la filtration naturelle des Y_n: $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ pour $n \geqslant 1$ et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Exercice 3. Soient $(X_n)_{n \geqslant 0}$ et $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ deux sur-martingales et T un temps d'arrêt tels que $T < +\infty$ implique $X_T \geqslant Y_T$. Montrer que le processus $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ défini par

$$Z_n = X_n \mathbb{I}_{T > n} + Y_n \mathbb{I}_{T \leqslant n}$$

est une sur-martingale.

Exercice 4. Soit $(M_n)_{n \geqslant 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$, telle que $\mathbb{E}(M_n^2) < +\infty$ pour tout $n \geqslant 0$. Soit

$$A_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}([\Delta M_i]^2 | \mathcal{F}_{i-1})$$

Montrer que $M_n^2 - A_n$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$-martingale ($\Delta M_i = M_i - M_{i-1}$).

Exercice 5. Soit $(M_n)_{n \geqslant 0}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geqslant 0}$ et tel que $M_n \in L^1$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que les propriété suivantes sont équivalentes:

a) $(M_n)_{n \geqslant 0}$ est une martingale.

b) $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$ pour tout temps d'arrêt borné T.

Indication pour *b)* $\Rightarrow$ *a)*: commencer par montrer que pour tous $n \geqslant 0$ et $A \in \mathcal{F}_n$ la variable $T_{n,A} = (n+1)\,\mathbb{I}_A + n\,\mathbb{I}_{A^c}$ est un temps d'arrêt.

Exercice 6.

a) Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une sur-martingale telle que $\mathbb{E}[X_n] = 1$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

b) Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une sur-martingale positive et $T = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n = 0\}$. On suppose que $T < +\infty$ presque surement. Montrer que $X_{T+k} = 0$ p.s. pour tout $k \geqslant 0$ (une sur-martingale positive qui touche zero y reste). (Sugg: decomposer $\mathbb{E}[X_{T+k}]$ par rapport aux valeurs de T)

c) Soient $(X_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ deux martingales de carré integrable (c-à-d $\mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$ et $\mathbb{E}[Y_n^2] < +\infty$ pour tout $n \geqslant 0$). Montrer que

$$\mathbb{E}[X_n\,Y_n] = \mathbb{E}[X_0\,Y_0] + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\Delta X_k\,\Delta Y_k]$$

d) Soient $(X_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ deux martingales de carré integrable (c-à-d $\mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$ et $\mathbb{E}[Y_n^2] < +\infty$ pour tout $n \geqslant 0$). Montrer que le processus $(M_n)_{n\geqslant 0}$ defini par

$$M_0 = 0, \qquad M_n = X_n Y_n - \sum_{k=1}^{n} \Delta X_k\,\Delta Y_k \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

est une martingale.

e) Soit $T \colon \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ un temps d'arrêt et $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus adapté. Soit $X_n^T = X_{n\wedge T}$ le processus arrêté en T. Montrer qu'il existe un processus prévisible et positif $(H_n)_{n\geqslant 1}$ tel que

$$X_n^T = X_0 + (H\cdot X)_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k \Delta X_k \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

f) Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ et soit $(\mathcal{G}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n))_{n\geqslant 0}$ la filtration naturelle de $(X_n)_{n\geqslant 0}$. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est aussi une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{G}_n)_{n\geqslant 0}$ et que tout temps d'arrêt T par rapport à la filtration $(\mathcal{G}_n)_{n\geqslant 0}$ est aussi un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 7. Soit G une v.a. géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ (c-à-d $\mathbb{P}(G = k) = p^k\,(1-p)$, $k \in \mathbb{N}$). Soit pour tout $n \geqslant 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma\,(G \wedge (n+1))$.

a) Montrer que $\mathcal{F}_n = \sigma(\{\{G = 0\}, \{G = 1\}, \ldots, \{G = n\}, \{G > n\}\})$.

b) Montrer que $M_n = \mathbb{I}_{G \leqslant n} - (1-p)\,(G \wedge n)$ et $Y_n = M_n^2 - p\,(1-p)\,(G \wedge n)$, $n \geqslant 0$ sont deux martingales pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_n = \pm 1) = 1/2$. Dans la suite on considère la filtration naturelle des X_i comme filtration de référence. On pose

$$Y_0 = 0, \qquad Y_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\,X_k \qquad n \geqslant 1.$$

C'est le gain dans un jeu de pile ou face où l'on double la mise à chaque coup. On souhaite s'arrêter dès qu'on gagne pour la première fois. On pose donc

$$T = \inf\{n \geq 1 \colon X_n = 1\}.$$

a) Montrer que $(Y_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, en déduire la valeur de $\mathbb{E}[Y_{n\wedge T}]$ pour tout $n \geqslant 0$.

b) Montrer $T < +\infty$ p.s. et montrer que $Y_T = 1$ p.s. Commenter.

c) Soit $D = |G_{T-1}|$. Montrer que $\mathbb{E}[D] = +\infty$. Interpréter ce résultat.

Exercice 9. (INEGALITÉ DE LUNDBERG) Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de v.a. iid. On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que $\mathbb{E}[e^{RX_1}] = 1$. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On veut montrer que pour tout $\ell \geqslant 0$ on a

$$\mathbb{P}\Big(\max_{0\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant \ell\Big) \leqslant e^{-R\ell}.$$

a) Montrer que le processus $(M_n)_{n\geqslant 0}$ donné par $M_n = e^{RS_n}$ pour $n \geqslant 1$ et $M_0 = 1$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ donnée par $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ avec $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

b) Montrer que $T = \inf\{n \geqslant 0 \colon S_n \geqslant \ell\}$ est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

c) Montrer que $\mathbb{P}(\max_{0\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant \ell) \leqslant \mathbb{E}[M_{n\wedge T}]e^{-R\ell}$ et conclure.

Exercice 10. (LA RUINE DU JOUEUR) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. avec $\mathbb{P}\,(X_n = +1) = p \in]0, 1[$, $\mathbb{P}\,(X_n = -1) = q = 1 - p$ et $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ la filtration naturelle des X. On fixe un entier $N \geq 2$. Soit $x \in \{0, 1, \ldots, N\}$, on pose $S_n = x + \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \geqslant 1$ et $T = \inf\{n \geqslant 0 \colon S_n = 0 \,\mathrm{ou S}_n = N\}$.

a) Montrer que T est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Soit $n \geqslant 0$, montrer que si $n < T$ et $X_{n+1} = X_{n+2} = \cdots = X_{n+N-1} = 1$, alors $T < n + N$.

c) En déduire que $\mathbb{P}\,(n + N - 1 < T) \leq (1 - p^{N-1})\,\mathbb{P}(n < T)$, puis que $T < +\infty$ p.s.

d) On suppose dans cette question et dans la suivante que $p = q = 1/2$. Montrer que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

e) En appliquant le théorème d'arrêt, déterminer $\mathbb{P}(S_T = 0)$.

f) On suppose désormais $p \neq q$. On pose $M_n = (q/p)^{S_n}$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

g) Déterminer $\mathbb{P}(S_T = 0)$.

Exercice 11. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. telle que X_n est une v.a. choisie uniformément dans l'alphabet $\mathcal{A} = \{A, B, \ldots, Z\}$ ($\#\mathcal{A} = 26$). Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ la filtration naturelle des X ($\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$). On considère la suite comme une chaîne de symboles. Soit T_{AB} le premier instant où on voit apparaitre la chaîne "AB" dans la suite $X_1\, X_2 \cdots X_n \cdots$ (formellement $T_{\mathrm{AB}} = \inf\{n \geqslant 2 \colon X_n = B, X_{n-1} = A\}$). On veut calculer le temps moyen $\mathbb{E}[T_{\mathrm{AB}}]$ d'apparition du mot "AB".

a) Soit $Y_n = \sum_{k=2}^{n} 26^2\, \mathbb{I}_{X_k = B, X_{k-1} = A} + 26\, \mathbb{I}_{X_n = A}$. Montrer que $M_n = Y_n - n$ est une martingale.

b) Montrer qu'il existe une constante $0 < c < 1$ telle que $\mathbb{P}(T_{\mathrm{AB}} > n) \leqslant c^n$. En déduire que $\mathbb{E}[T_{\mathrm{AB}}] < +\infty$ et $\mathbb{P}\,(T_{\mathrm{AB}} < +\infty) = 1$.

c) Montrer que $\mathbb{E}[T_{\mathrm{AB}}] = \mathbb{E}[Y_{T_{\mathrm{AB}}}] = 26^2$.

d) Soit $T_{\mathrm{BB}} = \inf\{n \geqslant 2 \colon X_n = B, X_{n-1} = B\}$. Montrer que $\mathbb{E}[T_{BB}] = 26^2 + 26$.

e) Soit $T_{\mathrm{ABRACADABRA}}$ le premier instant où on voit apparaitre la chaîne "ABRACA-DABRA". Montrer que $\mathbb{E}[T_{\mathrm{ABRACADABRA}}] = 26^{11} + 26^4 + 26$.