

[M. Gubinelli - Processus discrets - M1 MMD 2012/2013 - 20121103 - poly 3 - v.1]

### 3 Comportement asymptotique des martingales

#### 1 Convergence presque sure

On rappelle que une sur-martingale  $(X_n)_{n \geq 1}$  peut être considérée comme le gain dans un jeu défavorable, au sens où  $\Delta X_n$  est notre gain (pour une mise de 1) dans l' $n$ -ème partie, le caractère défavorable du jeu vient du fait que  $\mathbb{E}[\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1}] \leq 0$  : en moyenne on perd.

Fixons  $a < b$  deux réels quelconque et considérons la stratégie de jeu suivante: on commence par attendre le premier instant  $S_1$  où  $X_{S_1} < a$ , à ce moment on commence à jouer jusqu'au premier instant  $T_1 > S_1$  où  $X_{T_1} > b$ . A ce moment on a gagné la quantité  $X_{T_1} - X_{S_1} > b - a$  et on s'arrête de jouer jusqu'à  $S_2 > T_1$  où  $X_{S_2}$  redevient  $< a$  et on recommence. Si l'on fixe un horizon temporel  $n < \infty$  et l'on note  $U_n(a, b)$  le nombre de fois que  $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$  passe de  $]-\infty, a[$  à  $]b, +\infty[$  et  $W_n$  notre gain en utilisant la stratégie décrite on a que

$$W_n - W_0 \geq (b - a)U_n(a, b) - (X_n - a)_- \quad (1)$$

Le terme  $(X_n - a)_-$  correspond à ce que on a éventuellement perdu dans la dernière montée avant d'atteindre  $b$ . Il est aussi facile voir que  $(W_n)_{n \geq 1}$  est une sur-martingale car on peut écrire

$$W_n = W_0 + \sum_{k=1}^n H_n \Delta X_k$$

avec  $H_n = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{I}_{S_i \leq n \leq T_i - 1} = \mathbb{I}_{\{n \in \cup_{i \geq 1} [S_i, T_i - 1]\}}$ . De façon équivalente on peut définir  $(H_n)_{n \geq 1}$  par récurrence:  $H_1 = 0$ ,

$$H_{n+1} = \mathbb{I}_{H_n=0, X_n < a} + \mathbb{I}_{H_n=1, X_n > b}.$$

Alors  $U_n(a, b) = \sum_{i=2}^n \mathbb{I}_{H_n=0, H_{n-1}=1}$ .

**Exercice 1.** Montrer que  $(H_n)_{n \geq 1}$  est un processus prévisible.

Pour montrer que l'équation (1) est satisfaite pour tout  $n$  on définit  $T_n = \sup(0 \leq k \leq n : H_k = 0)$ . C'est le dernier instant avant  $n$  où on recommence la stratégie d'achat. Ce n'est pas un temps d'arrêt. À ce moment,  $X_{T_n} < a$ ,  $U_n(a, b) = U_{T_n}(a, b)$  et  $W_n - W_{T_n} = X_n - X_{T_n}$  car  $H_k = 1$  pour tout  $T_n \leq k \leq n$ . Or  $W_{T_n} - W_0 \geq (b - a)U_{T_n}(a, b)$  car chaque traversée montante il nous fait gagner au moins  $(b - a)$ . Alors

$$\begin{aligned} W_n - W_0 &= W_{T_n} - W_0 + X_n - X_{T_n} \geq (b - a)U_{T_n}(a, b) + X_n - a \\ &= (b - a)U_n(a, b) + (X_n - a)_+ - (X_n - a)_- \\ &\geq (b - a)U_n(a, b) - (X_n - a)_-. \end{aligned}$$

Du fait que  $(H_n)_{n \geq 1}$  est prévisible et que  $0 \leq H_n$  on obtient que  $(W_n)_{n \geq 1}$  est une sur-martingale :

$$0 \geq \mathbb{E}[W_n - W_0] \geq \mathbb{E}[U_n(a, b)](b - a) - \mathbb{E}[(X_n - a)_-]$$

(dans un jeu défavorable, toute stratégie ne peut qu'apporter des pertes en moyenne). On en déduit donc le lemme suivante (car  $\mathbb{E}[(X_n - a)_-] \leq \mathbb{E}[(X_n - a)_-] + \mathbb{E}[(X_n - a)_+] = \mathbb{E}[|X_n - a|]$ )

**Lemme 1.** (DOOB) Pour tout  $a < b$  et  $n \geq 1$  on a que

$$\mathbb{E}[U_n(a, b)] \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - a|]}{b - a}$$

ce qui donne une estimation du nombre de traversées montantes de l'intervalle  $[a, b]$  par le processus  $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$  en fonction d'une moyenne sur sa valeur terminale. Une conséquence importante pour les sur-martingales bornées dans  $L^1$  est donnée par le corollaire suivante:

**Corollaire 2.** *Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une sur-martingale bornée dans  $L^1$  (c-à-d  $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$ ), alors si on note  $U(a, b) = \sup_{n \geq 1} U_n(a, b)$  le nombre de traversées de l'intervalle  $[a, b]$  par  $(X_n)_{n \geq 1}$  on a que*

$$\mathbb{P}(U(a, b) = +\infty) = 0$$

pour tout  $a < b$ .

**Démonstration.** Par l'inégalité de Doob sur le nombre des montées de  $(X_n)_{n \geq 1}$  on a que

$$\mathbb{E}[U_n(a, b)] \leq \frac{a + \mathbb{E}[|X_n|]}{b - a} \leq \frac{a + \sup_n \mathbb{E}[|X_n|]}{b - a} < +\infty$$

pour tout  $a < b$  et  $n \geq 1$ . Par convergence monotone on a

$$\mathbb{E}[U(a, b)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[U_n(a, b)] \leq \frac{a + \sup_n \mathbb{E}[|X_n|]}{b - a} < +\infty$$

et donc que  $\mathbb{P}(U(a, b) = +\infty) = 0$  pour tout  $a < b$ .  $\square$

Tout cela montre que une sur-martingale ne peut pas osciller de façon trop irrégulière et que ça est liée au fait qu'il est impossible trouver des stratégies gagnantes sur une sur-martingale. Réciproquement un théorème analogue peut montrer que une sous-martingale bornée en  $L^1$  n'admet pas une infinité de traversées descendantes et donc que en jouant sur une sous-martingale on ne peut pas perdre une quantité illimitée d'argent.

Le théorème principale de ce chapitre est le suivante (à remarquer qu'il est formulé seulement pour les sous-martingales):

**Théorème 3.** (DOOB) *Une sous-martingale  $(X_n)_{n \geq 1}$  bornée dans  $L^1$  converge p.s. vers une v.a.  $X \in L^1$ .*

**Démonstration.** Le processus  $Y_n = -X_n$  est une sur-martingale bornée dans  $L^1$ . Soient  $L_+ = \limsup_n Y_n$  et  $L_- = \liminf_n Y_n$ . Supposons que  $\mathbb{P}(L_- < L_+) > 0$  (c-à-d  $Y_n$  ne converge pas p.s.). Par continuité de la probabilité  $\mathbb{P}$  il existent  $a < b$  tels que  $\mathbb{P}(L_- < a < b < L_+) > 0$ . Or

$$\{L_- < a < b < L_+\} \subseteq \{U(a, b) = +\infty\}$$

et on obtient donc que  $\mathbb{P}(U(a, b) = +\infty) > 0$  en contradiction avec la conséquence de la bornitude en  $L^1$  de  $(Y_n)_{n \geq 1}$ . Donc on doit avoir  $\mathbb{P}(L_- < L_+) = 0$  ce que donne la convergence p.s. de  $(Y_n)_n$  vers  $Y = L_- = L_+$  et donc de  $(X_n)_{n \geq 1}$  vers  $X = -Y$ . Or, par Fatou,  $\mathbb{E}[|X|] = \mathbb{E}[\liminf_n |X|] \leq \liminf_n \mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$  et donc  $X \in L^1$ .  $\square$

L'équivalent pour les sur-martingales est le théorème suivant.

**Théorème 4.** (DOOB) *Une sur-martingale  $(X_n)_{n \geq 1}$  positive converge p.s. vers une v.a.  $X \in L^1$ .*

**Démonstration.** On a que  $\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[X_n] \leq \mathbb{E}[X_0]$  par positivité et propriété de sur-martingale. Donc  $(-X_n)_{n \geq 1}$  est une sous-martingale bornée dans  $L^1$ . Par le théorème précédente elle converge vers un limite  $-X \in L^1$ . Cela revient à dire que  $X_n \rightarrow X$  p.s. et  $X \in L^1$ .  $\square$

**Exercice 2.** Montrer que si  $X \geq 0$  est une v.a. et que  $\mathbb{P}(X > 0) > 0$  alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\mathbb{P}(X > \varepsilon) > 0$  (Sugg: considérer les événements  $\{X \leq 1/n\}$  et montrer que si  $\mathbb{P}(X \geq 1/n) = 0$  alors  $\mathbb{P}(X > 0) = 0$ ).

**Exercice 3.** Montrer que  $\{L_- < a < b < L_+\} \subseteq \{U(a, b) = +\infty\}$  pour tout  $a < b$ .

**Remarque 5.** Bien que la limite d'une sous-martingale bornée dans  $L^1$  soit une v.a. dans  $L^1$ , cette convergence n'a pas a priori lieu dans  $L^1$ . Voici un contre-exemple.

Soit  $(Z_n)_{n \geq 0}$  une suite iid avec  $\mathbb{P}(Z_n = +1) = 1 - \mathbb{P}(Z_n = -1) = p$ . Soit  $u > 1$ . On pose  $X_0 = x$  et  $X_{n+1} = u^{Z_{n+1}} X_n$ . Supposons que  $p = 1/(1+u)$  de telle sorte que  $\mathbb{E}[u^{Z_{n+1}}] = 1$ . Alors il est facile de vérifier que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une martingale et donc  $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] = x$ . Par la loi forte des grands nombres on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k = \mathbb{E}[Z_1] = 2p - 1 = \frac{1-u}{1+u} < 0$$

d'où

$$\left( \frac{X_n}{x} \right)^{1/n} \rightarrow u^{2p-1} < 1 \quad p.s.$$

Ainsi  $X_n \rightarrow 0$  p.s., alors que son espérance est constante! (et donc  $X_n \not\rightarrow 0$  dans  $L^1$ ).

## 2 Martingales bornées dans $L^2$

**Théorème 6.** Soit  $(M_n)_{n \geq 0}$  une martingale telle que  $\alpha = \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[M_n^2] < +\infty$ . Alors la suite  $M_n$  converge dans  $L^2(\Omega)$  et p.s.

**Démonstration.** On écrit la martingale comme somme de ses incréments:

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n \Delta M_k$$

et on remarque que les incréments sont orthogonaux: si  $n > k$ :

$$\mathbb{E}[\Delta M_n \Delta M_k] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Delta M_n \Delta M_k | \mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}] \Delta M_k] = 0$$

car  $\Delta M_k \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_{n-1}$ . Donc

$$\mathbb{E}[M_n^2] = \mathbb{E}[M_0^2] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2]$$

et

$$\mathbb{E}[M_0^2] + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(\Delta M_k)^2] = \alpha$$

ce qui implique que la suite  $\sum_{k=1}^n \Delta M_k$  converge dans  $L^2(\Omega)$  et donc que  $M_\infty = \lim_n M_n$  dans  $L^2$ : en effet pour tout  $k' \geq k \geq n$

$$\mathbb{E}[|M_{k'} - M_k|^2] = \sum_{\ell=k+1}^{k'} \mathbb{E}[(\Delta M_\ell)^2] \leq \sum_{\ell=n+1}^{\infty} \mathbb{E}[(\Delta M_\ell)^2] \rightarrow 0$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ . La suite  $(M_n)_{n \geq 0}$  est donc de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$ . Comme la martingale est aussi bornée dans  $L^1 \subseteq L^2$  alors  $M_n \rightarrow X$  p.s. On veut montrer que  $M_\infty = X$  p.s. De la convergence  $L^2$  de  $M_n$  vers  $M_\infty$  on peut déduire que il existe une sous-suite  $(n_k)_{k \geq 1}$  telle que  $M_{n_k}$  converge p.s. vers  $M_\infty$ . Mais alors  $M_\infty = \lim_k M_{n_k} = \lim_n M_n = X$  p.s. .  $\square$