Université Paris - Dauphine

Processus Aléatoires Discrets

Examen du 22-1-2007

Aucun document n'est autorisé. Durée 2 heures.

1. (Temps d'attente avant l'apparition d'une séquence).
   Soit $(X_n; n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in (0,1)$: $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = p$. On désire calculer le temps moyen avant la première apparition d'une séquence de longueur trois donnée. Pour cela, on pose : $\tau_{ijk} = \inf\{n \geq 3; (X_{n-2}, X_{n-1}, X_n) = (i,j,k)\}$ pour $i,j,k \in \{0,1\}$.
   (a) Montrer que τ_{ijk} est un temps d'arrêt (par rapport à une filtration que l'on précisera).
   (b) Montrer que $Z_n = (X_{n-2}, X_{n-1}, X_n)$ est une chaine de Markov irreductible sur $M = \{0,1\}^3$. En deduire que $\mathbb{E}(\tau_{i,j,k}) < +\infty$.
   (c) On pose $S_0 = 0$ et $S_n = (S_{n-1} + 1)\frac{X_n}{p}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $(S_n - n; n \geq 0)$ est une martingale.
   (d) Calculer $E[\tau_{111}]$ (*on utilisera le theoreme d'arrêt de Doob*).
   (e) Calculer $P(\tau_{111} > \tau_{110})$.
2. Soit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ la tribu borelienne de Ω, $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{F}$. Soit K un entier positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par la partition
   $\{(jK^{-n}, (j+1)K^{-n}],\ j = 0, \ldots, K^n - 1\}$
   $$\mathcal{F}_n = \sigma\left\{(jK^{-n}, (j+1)K^{-n}],\ j = 0, \ldots, K^n - 1\right\}$$
   Soit α un nombre réel positif. On pose, pour tout $n \geq 0$
   $$X_n(\omega) = \begin{cases} \alpha^n & \text{si } 0 \leq \omega \leq K^{-n}, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$
   (a) Montrer que $\{\mathcal{F}_n\}_n$ est une filtration croissante.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.
   (c) Pour quelle valeur de α on a que X_n est une martingale par rapport a cette filtration ?
   (d) Pour quelles valeurs de α on a que X_n est une sous-martingale ?
   (e) Calculer la limite presque sure de X_n pour $n \to \infty$.
3. *Château de cartes.* On considère la suite de v.a. definie par
   $$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{avec probabilité } p \in]0,1[\\ 0 & \text{avec probabilité } 1-p \end{cases}$$
   indépendamment de ce qui précède.
   (a) Identifier le système dynamique aleatoire correspondant, et donner sa matrice de transition.
   (b) Chercher les probabilités invariantes par la chaîne.
   (c) Montrer que, $\forall y$, $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}_y(X_n = x) = \pi(x)$, où π est la probabilité invariante.
   (d) Soit $\tau_k = \inf\{n \geq 1 : X_n = k\}$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$. Calculer $\mathbb{E}(\tau_k)$.
   (e) Calculer, en partant de 0 ($X_0 = 0$) l'espérance du temps passe au-dessus de k avant de tomber sur 0 la premiere fois
   $$\mathbb{E}_0\left(\sum_{n=0}^{\tau_0 - 1} 1_{[X_n \geq k]}\right)$$