Université Paris - Dauphine

Processus Aléatoires Discrets

Examen du 19-1-2009

Aucun document n'est autorisé. Durée 2 heures.

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur M denombrable et soit P sa matrice de transition. Soit u une fonction positive borné sur M telle que

$$Pu(x) = \beta u(x), \qquad \forall x \in M \tag{1}$$

   (a) Montrer que $Z_n = \beta^{-n} u(X_n)$ est une martingale (par rapport à la filtration canonique de $(X_n)_{n\geq 0}$).

   (b) Soit T un temps d'arrêt borné. Montrer que

$$u(x) = \mathbb{E}_x\left(\beta^{-T} u(X_T)\right) \tag{2}$$

   (c) Soit S_n la marche aleatoire symetrique sur $\mathbb{Z}$, $S_n = S_0 + \sum_{i=0}^{n} Y_i$, avec $(Y_n)_n$ i.i.d. et $\mathbb{P}(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = 1/2$. Soit $T_R = \inf\{n : |S_n| \geq R\}$.

   (d) Montrer que, pour $0 < \lambda < \pi/2$

$$Z_n = \frac{\cos(\lambda S_n)}{(\cos\lambda)^n}$$

   est une martingale.

   (e) Soit $0 < \lambda < \frac{\pi}{2R}$. Montrer que pour $-R < x < R$

$$\mathbb{E}_x\left((\cos\lambda)^{-T_R}\right) = \frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\lambda R)} \tag{3}$$

   En deduire que $\mathbb{E}_x(e^{\sigma T_R})$ n'est pas fini pour tout $\sigma > 0$.

   (f) En deduire une estimation

$$\mathbb{P}_x(T_R \geq n) \leq C\beta^n \tag{4}$$

   avec $\beta < 1$.

2. Soit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ la tribu borelienne de Ω, $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{F}$. Soit K un entier positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par la partition $\{(jK^{-n}, (j+1)K^{-n}],\ j = 0, \ldots, K^n - 1\}$

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left\{(jK^{-n}, (j+1)K^{-n}],\ j = 0, \ldots, K^n - 1\right\}$$

   Soit α un nombre réel positif. On pose, pour tout $n \geq 0$

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \alpha^n & \text{si } 0 \leq \omega \leq K^{-n}, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

   (a) Montrer que $\{\mathcal{F}_n\}_n$ est une filtration croissante.

   (b) Calculer $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.

   (c) Pour quelle valeur de α on a que X_n est une martingale par rapport a cette filtration ?

   (d) Pour quelles valeurs de α on a que X_n est une sous-martingale ?

   (e) Calculer la limite presque sure de X_n pour $n \to \infty$.

3. *Château de cartes.* On considère la suite de v.a. definie par

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{avec probabilité } p \in]0,1[\\ 0 & \text{avec probabilité } 1-p \end{cases}$$

indépendamment de ce qui précède.

(a) Identifier le système dynamique aleatoire correspondant, et donner sa matrice de transition.

(b) Chercher les probabilités invariantes par la chaîne.

(c) Montrer que, $\forall y$, $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}_y(X_n = x) = \pi(x)$, où π est la probabilité invariante.

(d) Soit $\tau_k = \inf\{n \geq 1 : X_n = k\}$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$. Calculer $\mathbb{E}(\tau_k)$.

(e) Calculer, en partant de 0 ($X_0 = 0$) l'espérance du temps passe au-dessus de k avant de tomber sur 0 la premiere fois

$$\mathbb{E}_0 \left(\sum_{n=0}^{\tau_0 - 1} 1_{[X_n \geq k]} \right)$$