

Université Paris - Dauphine
Processus Aléatoires Discrets
 Examen du 04-09-2006

Aucun document n'est autorisé. Durée 2 heures.

1. Soit X_0 une variable aléatoire appartenant à \mathbb{N} . On définit alors une suite de v.a. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 & \text{avec probabilité } p \in]0, 1[\\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - p. \end{cases}$$

- (a) Identifier le système dynamique aléatoire correspondant, vérifier que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov, et donner sa matrice de transition.
 (b) Chercher les probabilités invariantes par la chaîne.
 (c) Montrer que, $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_y(X_n = x) = \pi(x)$, où π est une probabilité sur \mathbb{N} que l'on précisera.

2. On considère la chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la chaîne est irréductible et calculer sa probabilité invariante.
 2. Soit $N_n(i)$ le nombre de fois où la chaîne passe par l'état i au cours des n premières étapes. Quel est le comportement asymptotique de $N_n(i)$ quand n tend vers l'infini ?

3. (a) i. Soit M_n une martingale par rapport à une filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$, telle que $\mathbb{E}(M_n^2) < +\infty$. Soit

$$A_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}([M_i - M_{i-1}]^2 | \mathcal{F}_{i-1})$$

Montrer que $M_n^2 - A_n$ est une \mathcal{F}_n -martingale.

- ii. Application : montrer que si $(S_n, n \in \mathbb{N})$ est une marche aléatoire symétrique simple à valeurs dans \mathbb{N} , alors $S_n^2 - n, n \in \mathbb{N}$, est une martingale par rapport à la filtration naturelle engendrée par $(S_n, n \in \mathbb{N})$.
 (b) Soit X_n une chaîne de Markov sur un espace M fini, avec matrice de transition P . Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. On rappelle que la fonction $Pf : M \rightarrow \mathbb{R}$ est définie à partir de P et f par $Pf(i) = \sum_{j \in M} P(i, j)f(j), \forall i \in M$.

- i. Montrer que

$$M_n = f(X_n) - f(X_0) + \sum_{k=0}^{n-1} [f(X_k) - (Pf)(X_k)]$$

est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)\}_{n \geq 0}$.

- ii. Montrer que

$$M_n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} [(P(f^2))(X_k) - ((Pf)(X_k))^2]$$

est une \mathcal{F}_n -martingale (par définition, $f^2(i) = (f(i))^2, \forall i \in M$).