Rattrapage 2009

[Durée deux heures. Aucun document n'est autorisé. Seule les reponses soigneusement justifiées seront prise en compte.]

1. Temps d'arrêt.

Soient T et S des temps d'arrêt par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ donnée et soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ un processus adapté à la même filtration.

a) Montrer que $\max(T,S)$ et $\min(T,S)$ sont des t.a.s.

b) Montrer que la v.a. X_T est $\mathcal{F}_T$ mesurable.

c) Montrer que si $S\leqslant T$ alors $\mathcal{F}_S\subseteq\mathcal{F}_T$.

2. Arrêt optimal en horizon fini.

Soit $(Y_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ le processus des gains pour un problème d'arrêt optimal en horizon fini N pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$.

a) Donner la définition d'enveloppe de Snell $(Z_n)_n$ de $(Y_n)_n$.

b) Donner la formule récursive satisfaite par l'enveloppe de Snell $(Z_n)_n$.

c) Soit $T^*=\inf\{k\colon 1\leqslant k\leqslant N \,\text{et}\, Y_k=Z_k\}$. Montrer que T^* est un temps d'arrêt.

d) Montrer que $Z_{n\wedge T^*}$ est une martingale.

e) Montrer que $\mathbb{E}[Z_1]=\sup_T \mathbb{E}[Y_T]=J_T$, le gain moyen optimal du problème d'arrêt.

3. Le problème de Moser

On considère une suite iid $(X_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$ tel que $X_n\geqslant 0$, $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\ldots,X_n)$ la filtration associée et $Y_n=X_n$ le processus des gains. On veut déterminer le gain optimal moyen $J_T=\sup_T\mathbb{E}[Y_T]$.

a) Montrer que Z_n est mesurable par rapport à $\sigma(X_n)$.

b) Montrer que $\mathbb{E}[Z_n]=\mathbb{E}[\sup(X_n,\mathbb{E}[Z_{n+1}])]$ pour tout $n<N$.

c) Montrer que $\mathbb{E}[Z_n]$ est une fonction décroissante de n.

d) Montrer que une règle optimale est $T^*=\inf_N\{k<N : X_k\geqslant\mathbb{E}[Z_{k+1}]\}$ (où $\inf_N A=\inf A$ si $A\neq\emptyset$ et $\inf_N\emptyset=N$).

3. Horizon infini.

On considère un problème d'arrêt en horizon infini. On suppose que $\mathbb{E}[(\sup_{n\geqslant 1}Y_n)_+]<\infty$. Soit T un t.a et $\tilde{T}=\inf\{n\geqslant 1\colon \mathbb{E}[Y_T|\mathcal{F}_n]\leqslant Y_n\}(+\infty$ si l'ensemble est vide). On rappelle que S est un temps d'arrêt regulier si et seulement si pour tout $n\geqslant 1$ on a que $\mathbb{E}[Y_S|\mathcal{F}_n]>Y_n$ sur l'evenement $\{S>n\}$.

a) Montrer que $\tilde{T}\leqslant T$.

b) Montrer que $\mathbb{E}[Y_T]\leqslant\mathbb{E}[Y_{\tilde{T}}]$.

c) Montrer que $\tilde{T}$ est un t.a. régulier.

d) Montrer que si T_1 et T_2 sont t.a. réguliers alors $\mathbb{E}[Y_{\max(T_1,T_2)}]\geqslant\max(\mathbb{E}[Y_{T_1}],\mathbb{E}[Y_{T_2}])$.