Examen

[Durée deux heures. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont indépendants. Seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.]

Exercice 1. On lance un dé de manière répétitive. On admettra que les suites aléatoires suivantes sont des chaînes de Markov. Dans chaque cas déterminer l'espace d'états $\mathcal{M}$, donner la matrice de transition P, classifier les états et déterminer si ils sont transients ou récurrents et s'il existent ou pas des probabilités invariantes (il ne sera pas necessaire de les déterminer).

a) $(X_n)_{n\geqslant 1}$ où X_n est le plus grand résultat obtenu après n lancers.

b) $(N_n)_{n\geqslant 1}$ où N_n est le nombre de 6 obtenus au bout de n lancers.

c) $(C_n)_{n\geqslant 1}$ où C_n est nombre de lancers, à l'instant n, depuis le dernier 6.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la chaîne de Markov sur $\mathcal{M}=\{1,2,3,4,5\}$ de matrice de transition

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a) Dessiner le graphe associé à cette matrice de transition.

b) Soit $T_x = \inf\{n \geqslant 0 \colon X_n = x\}$. Calculer $\mathbb{P}(T_2 = n|X_0 = 4)$ pour tout $n \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(T_3 < T_5|X_0=1)$.

c) Soit $u(x) = \mathbb{P}(T_4 < T_5|X_0 = x)$ pour tout $x \in \mathcal{M}$. Déterminer l'équation linéaire satisfaite par u (sans la résoudre).

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus adapté et intégrable. Pour tout processus borné et prévisible $(H_n)_{n\geqslant 1}$ on définit

$$(H\cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1}).$$

a) Démontrer que $\mathbb{E}[(H\cdot X)_k] = 0$ pour tout processus $(H_n)_{n\geqslant 1}$ prévisible et borné et tout $k \geqslant 1$ si et seulement si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

b) En déduire que se $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale et T un temps d'arrêt alors $\mathbb{E}[X_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[X_0]$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid telle que $\mathbb{P}(X_n=1)=p$ et $\mathbb{P}(X_n=0)=1-p=q$ avec $p\in]0,1[$ et $T_{111}=\inf\{n\geqslant 3\colon X_{n-2}=1, X_{n-1}=1, X_n=1\}$ le premier instant où l'on observe la suite « 111 ». Le but de cet exercice c'est de calculer $\mathbb{E}[T_{111}]$ avec une méthode de martingales. Soit $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\ldots,X_n)$ et $\mathcal{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$ la filtration naturelle des $(X_n)_{n\geqslant 1}$. Soit $M_0=0$ et

$$M_n=-n+a\,\mathbb{I}_{X_n=1}+b\,\mathbb{I}_{X_n=1,X_{n-1}=1}+c\sum_{k=3}^{n}\mathbb{I}_{X_n=1,X_{n-1}=1,X_{n-2}=1}$$

a) Déterminer a,b,c de sorte que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ soit une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

b) Montrer que T_{111} est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

c) Soit $S=\inf\{k\geqslant 1\colon X_{3k-2}=1, X_{3k-1}=1, X_{3k}=1\}$. Déterminer la loi de S. Montrer que $T_{111}\leqslant S$ et en déduire que $\mathbb{E}[T_{111}]<+\infty$ et donc que $T_{111}<+\infty$ p.s.

d) Déterminer la valeur de $M_{T_{111}}$ et utiliser la martingale $(M_n)_{n\geqslant 0}$ pour calculer $\mathbb{E}[T_{111}]$.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid telle que $\mathbb{P}(X_n=1)=p$ et $\mathbb{P}(X_n=0)=1-p=q$ avec $p\in]0,1[$ et $T_{111}=\inf\{n\geqslant 3\colon X_{n-2}=1, X_{n-1}=1, X_n=1\}$ le premier instant où l'on observe la suite « 111 ». Le but de cet exercice est de calculer $\mathbb{E}[T_{111}]$ avec une méthode de chaînes de Markov. Pour tout $n\geqslant 0$ soit $Y_n=(X_{n+1},X_{n+2},X_{n+3})$.

a) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ définit une chaîne de Markov homogène sur l'espace $\mathcal{M}=\{0,1\}^3=\{000,001,010,011,100,101,110,111\}$.

b) Décrire sa matrice de transition $P\colon\mathcal{M}\times\mathcal{M}\to[0,1]$ et la loi initiale $\mu_0(y)=\mathbb{P}(Y_0=y)$ pour tout $y\in\mathcal{M}$. (Pour décrire la matrice de transition il sera suffisant de donner le graphe de la chaîne avec les probabilités de chaque transition possible)

c) Soit $S=\inf\{n\geqslant 0\colon Y_n=111\}$ et $u(y)=\mathbb{E}_y[S]$. Déterminer l'équation lineaire satisfaite par $u\colon\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ et la résoudre.

d) Déterminer $\mathbb{E}[T_{111}]$.