MIDO M1 MMD	Université Paris-Dauphine 13/14
Processus discrets	[v.3 20131117]

Partiel

[Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont indépendantes. Seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.]

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité fixé et muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$. Sauf indication explicite tout processus adapté ou martingale est référé à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$. On rappel que $\Delta X_k = X_k - X_{k-1}$.

Exercice 1. Soit $Z \sim \mathcal{E}(1)$ une v.a. exponentielle de paramètre 1. Soit $Y = \mathbb{I}_{1\leqslant Z\leqslant 2}$. Calculer $\mathbb{E}[Z|Y]$ et $\mathbb{E}[Y|Z]$.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus adapté et integrable. Montrer que si $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$ pour tout temps d'arrêt borné T alors $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une sous-martingale telle que pour tout $n\geqslant 0$ on a $|X_n| \leqslant Z$ où Z est une v.a. integrable. Soient S, T deux temps d'arrêt tels que $0 \leqslant S \leqslant T$ et que $\mathbb{E}[T] < +\infty$. On pose $V_k = \mathbb{I}_{S<k\leqslant T}$ pour tout $k \geqslant 0$.

a) Montrer que $(V_k)_{k\geqslant 1}$ est un processus previsible.

b) Montrer que $((V \bullet X)_n)_{n\geqslant 0}$ est une sous-martingale.

c) Calculer $(V \bullet X)_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

d) En déduire que $\mathbb{E}[X_S] \leqslant \mathbb{E}[X_T]$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite iid de v.a. de loi $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = +1) = 1/2$. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ la filtration engendrée par les $(X_n)_{n\geqslant 1}$. On considère la marche aléatoire simple $S_n = X_1 + \dots + X_n$ qui démarre de 0 et $T = \inf\{n \geqslant 0 : S_n = 1\}$ le premier temps d'atteinte de 1. Le but de l'exercice est de montrer que T est fini p.s. mais non intégrable.

a) Soit $(S_n^T)_{n\geqslant 0}$ le processus arrêté en T. Montrer que $(S_n^T)_{n\geqslant 0}$ converge p.s.

b) En déduire que T est fini p.s. (indication: montrer que $S_n^T - S_{n+1}^T$ tend vers 0 p.s.)

c) La suite $(S_n^T)_{n\geqslant 0}$ converge-t-elle dans L^1?

d) Montrer que T n'est pas intégrable (indication: raisonner par l'absurde)

e) Pour tout $\theta > 0$ soit $M_n = \exp(\theta S_n - \lambda(\theta) n)$. Déterminer la fonction $\lambda(\theta)$ de sorte que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ soit une martingale.

f) Calculer $\mathbb{E}[M_{n\wedge T}]$ pour tout $n \geqslant 1$.

g) Montrer que $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda(\theta)T}\right] = e^{-\theta}$.

h) En déduire une formule pour la fonction generatrice de T, $\varphi_T(s) = \mathbb{E}[e^{sT}]$, pour $s \leqslant 0$.