Rattrapage

[Durée deux heures. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont indépendants. Seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.]

Exercice 1. Trois chars livrent un combat. Le char A atteint sa cible avec la probabilité $2/3$, le char B avec la probabilité $1/2$ et le char C avec la probabilité $1/3$. Ils tirent tous ensembles et dès qu'un char est touché, il est détruit. On considère à chaque instant, l'ensemble des chars non détruits. Montrer qu'on obtient une chaîne de Markov dont on explicitera l'ensemble des états et la matrice de transition dans le cas où à chaque instant chaque char tire sur son adversaire le plus dangereux (le char qu'il a la plus grande probabilité d'atteindre sa cible).

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la chaîne de Markov sur $\mathcal{M}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ de matrice de transition

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & \alpha & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/9 & 7/9 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le coefficient $\alpha\in[0,1]$.

b) Dessiner le graphe associé à cette matrice de transition en précisant les probabilités de transitions entre les différents états.

c) Déterminer les classes d'états récurrents et transitoires. La chaîne est-elle irréductible?

d) Donner une formule pour $\mathbb{P}(X_n=6|X_0=3)$ quand $n=1,2,3,4$.

e) Donner une formule pour $\mathbb{P}(X_n=6|X_0=3)$ pour tout $n\geqslant 1$.

f) Soit $T_x=\inf\{n\geqslant 0\colon X_n=x\}$. Calculer $\mathbb{P}(T_1<T_7|X_0=2)$ et $\mathbb{P}(T_1<T_7|X_0=5)$.

g) Déterminer toutes les probabilités invariantes de cette chaîne.

Exercice 3. On se donne un espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ et une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$. Les (sur-, sous-)martingales et le temps d'arrêt sont considérés par rapport à cette filtration.

a) Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale telle que $|M_n|\leqslant K<+\infty$ pour tout $n\geqslant 0$, où K est un réel fixé, l'on pose

$$X_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(M_k-M_{k-1})}{k};$$

montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale qui converge p.s. et dans L^2.

b) Soient $(X_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ deux martingales de carré integrable, montrer que pour tout $m\geqslant n$ on a $\mathbb{E}[Y_mX_n|\mathcal{F}_n]=Y_nX_n$ et que

$$\mathbb{E}[X_nY_n]=\mathbb{E}[X_0Y_0]+\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[(X_k-X_{k-1})(Y_k-Y_{k-1})].$$

c) Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une surmartingale telle que $\mathbb{E}[X_n]$ soit constante. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale.

d) Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus intégrable et adapté. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale si et seulement si, pour tout temps d'arrêt borné τ on a $\mathbb{E}[X_\tau]=\mathbb{E}[X_0]$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de v.a. telle que $X_0\in[0,1]$ et

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=X_n/2|\mathcal{F}_n)=1-X_n, \quad \mathbb{P}(X_{n+1}=(1+X_n)/2|\mathcal{F}_n)=X_n;$$

où $(\mathcal{F}_n=\sigma(X_0,...,X_n))_{n\geqslant 0}$ est la filtration engendrée par les $(X_n)_{n\geqslant 0}$.

a) Montrer que $X_n\in[0,1]$ pour tout $n\geqslant 1$;

b) Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale;

c) Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge p.s. et dans L^2 vers une v.a. $Z\in L^2(\Omega)$ quand $n\to+\infty$;

d) Montrer que $\mathbb{E}[(X_{n+1}-X_n)^2]=\frac{1}{4}\mathbb{E}[X_n(1-X_n)]$;

e) Calculer $\mathbb{E}[Z(1-Z)]$. Quelle est la loi de Z?