

[M. Gubinelli - Processus discrets - M1 MMD 2014/2015 - 20141128 - poly 4 - v.1]

## 4 Chaînes de Markov

### 1 Définitions et premières propriétés

On s'intéresse ici à des processus discrets  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  avec une simple propriété de dépendance qui néanmoins admettent une grande variété des comportements et de possibilités de modélisation. Ils sont nommées en honneur du mathématicien russe A. Markov qui n'a introduit l'étude.

**Définition 1.** Soit  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  un processus discret défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans l'ensemble dénombrable  $M$ . On dit que  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov (sur  $M$ ) ssi  $\forall n \geq 0$  et  $\forall x_0, \dots, x_{n+1} \in M$ ,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \quad (1)$$

Autrement dit, la loi conditionnelle de  $X_{n+1}$  sachant  $X_0, \dots, X_n$  (le passé) ne dépend que de  $X_n$  (le présent). On appelle  $M$  l'espace d'états de la chaîne  $\{X_n\}_{n \geq 0}$ ,  $X_0$  l'état initiale de la chaîne et la loi de  $X_0$  loi initiale.

**Définition 2.** On dit que la chaîne est homogène ssi la loi conditionnelle de  $X_{n+1}$  sachant  $X_n$  ne dépend pas de  $n$ , i.e.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x) = P(x, y) \quad \forall n \geq 0, x, y \in M$$

La fonction  $P: M \times M \rightarrow [0, 1]$  est la matrice (ou probabilité) de transition de la chaîne  $\{X_n\}_{n \geq 0}$ .

En général une matrice de transition sur  $M$  est une application  $P: M \times M \rightarrow [0, 1]$  telle que pour tout  $x \in M$

$$\sum_{y \in M} P(x, y) = 1. \quad (2)$$

(vérifier que la matrice de transition d'une chaîne de Markov satisfait cette équation).

Dans la suite on va considérer seulement des chaînes de Markov homogènes (sauf indication explicite du contraire).

**Exemple 3.** MARCHE ALÉATOIRE SUR  $\mathbb{Z}$ . Un joueur lance successivement et de manière indépendante une pièce de monnaie, éventuellement biaisée. Chaque fois qu'il obtient un Pile il reçoit un euro, chaque fois qu'il obtient un Face, il perd un euro. Soit  $k_0 \in \mathbb{Z}$  sa fortune initiale. On note  $S_n$  sa fortune à l'étape  $n$ . Nous avons  $S_0 = k_0$  et  $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ , où  $X_{n+1}$  est une variable aléatoire représentant le gain (ou la perte, selon si positif ou négatif) à l'étape  $n + 1$ :  $X_{n+1} = 1$  avec probabilité  $p \in ]0, 1[$ , et  $-1$  sinon. Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_k, \dots$  sont i.i.d. par hypothèse. La suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  est donc une chaîne de Markov homogène de matrice de transition

$$P(k, m) = \begin{cases} p & \text{si } m = k + 1; \\ 1 - p & \text{si } m = k - 1; \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}$$

**Exemple 4.** MODÈLE DE WRIGHT-FISCHER. Ce modèle décrit l'évolution d'un ensemble de  $N$  chromosomes. On suppose qu'il y a 2 types de chromosomes, A et B, et on note  $X_n$  le nombre de chromosomes de type A présents à la génération  $n$  (il y en a donc  $N - X_n$  de type B). Le modèle évolue de la façon suivante : chaque chromosome de la génération  $n + 1$  choisit au hasard et uniformément un chromosome parent dans la génération  $n$ , ceci indépendamment des autres chromosomes. Le chromosome fils a alors le même type que son chromosome parent. Si  $X_n = i$ , chaque chromosome de la génération  $n + 1$  sera donc de type A avec probabilité  $i/N$ . On en déduit que la suite  $X_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, N\}$ , de probabilité de transition

$$P(i, j) = C_N^j \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j} \quad \forall i, j \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

**Exemple 5.** PANNES ALÉATOIRES. Soit  $\{U_n\}_{n \geq 0}$  une suite iid à valeurs dans  $\{1, 2, \dots, +\infty\}$ . La v.a.  $U_k$  s'interprète comme durée de vie d'une quelque machine (la  $k$ -ème) qui est remplacée par un autre (la  $k + 1$ -ème) de que elle défaille. Au temps initial 0 la machine 1 est mise en service et elle dure jusqu'au temps  $U_1$ , subitement remplacée par la machine 2 que dure pour un intervalle de temps  $U_2$  et donc jusqu'au temps  $U_1 + U_2$  et ainsi de suite. On note  $X_n$  le temps de service de la machine en utilisation au temps  $n$ . Le processus  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  est un processus à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Si  $R_k = \sum_{m=1}^k U_m$  (avec la convention que  $R_0 = 0$ ) est l'instant de remplacement de la  $k$ -ème machine ( $k \geq 1$ ) on a la relation suivante:

$$X_n = n - R_k \quad \text{pour } R_k \leq n < R_{k+1}.$$

Le processus  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  est tel que  $X_{R_k} = 0$  pour tout  $k \geq 0$  et il croît linéairement dans les intervalles  $[R_k, R_{k+1} - 1]$ . Il est une chaîne de Markov homogène sur  $\mathbb{N}$  de matrice de transition

$$P(i, j) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(U_1 > i+1)}{\mathbb{P}(U_1 > i)} & \text{si } j = i + 1 ; \\ 1 - P(i, i+1) & \text{si } j = 0 ; \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

**Remarque 6.** Etant données une matrice de transition  $P$  et une loi de probabilité  $\mu$ , on peut toujours construire une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$  issue d'une variable aléatoire initiale  $X_0$  distribuée suivant une quelconque probabilité  $\mu$  sur  $M$ .

**Notations.** Pour tout  $x \in M$  on note  $\mathbb{P}_x$  la probabilité conditionnelle sachant que  $X_0 = x$  (i.e.  $\mathbb{P}_x(A) = \mathbb{P}(A | X_0 = x)$  pour tout événement  $A \in \mathcal{F}$ ); et  $\mathbb{E}_x$  l'espérance correspondante.

## 1.1 Systèmes dynamiques aléatoires

Soit  $(\Theta, \mathcal{B}, m)$  un espace de probabilité et  $\theta_1, \theta_2, \dots$  une suite infinie de variables aléatoires i.i.d., à valeurs dans  $\Theta$ , de loi  $m$ :

$$\mathbb{P}(\theta_i \in A) = m(A), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Soit  $f: \Theta \times M \rightarrow M$  une application mesurable ( $\{\theta: f(\theta, x) = y\} \in \mathcal{B}, \forall x, y \in M$ ).

On considère  $X_0$  une variable aléatoire indépendante de la suite  $\{\theta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ , et récursivement on pose

$$X_{n+1} = f(\theta_{n+1}, X_n), \quad n \geq 0. \quad (3)$$

**Définition 7.**  $(f, m)$  s'appelle un système dynamique aléatoire.

**Exercice 1.** Montrer que la suite  $(X_n, n \geq 0)$  définie par l'eq. (3) est une chaîne de Markov homogène.

**Exemple 8.** (Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ ) Soit  $X_0$  une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  et  $\{Z_n\}_{n \geq 1}$  une suite iid indépendant of  $X_0$ , à valeurs dans l'ensemble  $\{-1, +1\}$  et tel que  $\mathbb{P}(Z_1 = +1) = p$ . Le processus discret défini par

$$X_n = X_{n-1} + Z_n, \quad n \geq 1$$

est une chaîne de Markov homogène de même loi que la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  définie dans l'exemple 3.

## 1.2 Equation de Chapman-Kolmogorov

Soit  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov homogène de matrice de transition  $P$ . Pour toute fonction bornée  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  on pose

$$Pf(x) = \sum_{y \in M} P(x, y) f(y) = \mathbb{E}_x[f(X_1)]. \quad (4)$$

Soit  $\Pi(M) = \{\mu: M \rightarrow [0, 1], \sum_{x \in M} \mu(x) = 1\}$ , l'ensemble des mesures de probabilité sur  $M$ . Pour toute  $\mu \in \Pi(M)$  on pose

$$\mu P(x) = \sum_{y \in M} \mu(y) P(y, x). \quad (5)$$

On remarque que  $\mu P \in \Pi(M)$ . On définit aussi  $P^2, P^n$ , etc, par récurrence en utilisant la règle usuelle de multiplication des matrices :

$$P^{n+1}(x, y) = \sum_{z \in M} P(x, z) P^n(z, y). \quad (6)$$

**Théorème 9.** Soit  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$ . On note  $\mu_0 \in \Pi(M)$  la loi de  $X_0$ . Alors

1. La loi de  $(X_0, \dots, X_n)$  est donnée par

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \mu_0(x_0) P(x_0, x_1) \dots P(x_{n-1}, x_n), \quad (7)$$

$\forall$  les états  $x_0, \dots, x_n \in M$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Réciproquement, tout processus  $(X_n)_{n \geq 0}$  vérifiant l'équation (7) est une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$  et de loi initiale  $\mu_0$ .

2. La loi de  $X_n$  est  $\mu_n = \mu_0 P^n$ . Elle est donc entièrement caractérisée par  $\mu_0$  et  $P$ .
3. Pour toute fonction bornée  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , tout  $x \in M$ ,

$$\mathbb{E}_x[f(X_n)] = P^n f(x).$$

**Démonstration.** Exercice. □

**Remarque 10.** La suite  $(Y_n)_{n \geq 0}$  définie par  $Y_n = X_{k+n}$ ,  $k$  étant fixé, est aussi une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$ .

**Proposition 11.** PROPRIÉTÉ DE MARKOV SIMPLE. Soient  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov et  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  la tribu engendrée par  $X_1, \dots, X_n$  (i.e. la tribu représentant "le passé jusqu'à l'instant  $n$ "). Alors la propriété de Markov peut s'écrire

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(f(X_{n+1}) | X_n) = Pf(X_n), \quad (8)$$

pour toute fonction bornée  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 1.3 Classification des états

**Définition 12.** On dit que  $x$  communique avec  $y$  (et l'on note  $x \rightarrow y$ ) ssi une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée:

- a) il existe  $n \geq 1$  et un  $n + 1$ -plet d'états  $(x_1 = x, \dots, x_{n+1} = y)$  tels que  $P(x_i, x_{i+1}) > 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .
- b) il existe  $n \geq 1$  tel que  $P^n(x, y) > 0$ .
- c)  $\mathbb{P}_x(\exists k \geq 1: X_k = y) > 0$ .

**Exercice 2.** Verifier que les propriétés a),b),c) sont équivalentes. Sugg.:

$$P(x, x_2) \cdots P(x_n, y) \leq P^n(x, y)$$

et

$$P^n(x, y) \leq \mathbb{P}_x(\exists k \geq 1: X_k = y) \leq \sum_{k \geq 1} P^k(x, y).$$

Si  $x \rightarrow y$  et  $y \rightarrow x$  ou si  $x = y$  alors on dit que  $x$  et  $y$  *communiquent* et l'on note  $x \leftrightarrow y$ . La relation  $\leftrightarrow$  est transitive, symétrique et réflexive. Elle est donc une relation d'équivalence et définit des classes  $\{C_k \subseteq M\}_k$  d'éléments qui communiquent entre eux (classes de communication) et qui forment une partition de  $M$ . On dit que un ensemble  $A \subseteq M$  est fermé si  $x \in A, x \rightarrow y \Rightarrow y \in A$ . Un état  $x$  est dit absorbant ssi  $\{x\}$  est une classe fermé. Si  $M$  est formé d'une seule classe de communication (c-à-d si tout les états communiquent entre eux) on dit que la chaîne  $X$  (ou la matrice de transition  $P$ ) est *irréductible*.

**Exemple 13.** La marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  et le modèle de l'urne d'Ehrenfest sont irréductibles. Par contre, le modèle de Wright-Fisher n'est pas irréductible: les états 0 et  $N$  ne communiquent qu'avec eux-même. La matrice (13) (plus en bas) n'est pas non plus irréductible.

## 1.4 Recurrence

Soit  $N_x = \text{card}\{n \geq 1: X_n = x\}$  les nombres des visites à l'état  $x$  :

$$N_x = \sum_{n \geq 1} 1_{X_n = x}.$$

**Définition 14.** Un état  $x \in M$  est appelé récurrent si  $\mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = 1$  et transient si  $\mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = 0$ .

On revient toujours à un état recurrent, mais presque surement on visite un état transient seulement un nombre fini des fois. On va montrer que les état sont soit recurrent, soit transients.

Pour tout  $x \in M$ , on considère

$$T_x = \inf \{k > 0: X_k = x\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \quad (9)$$

le premier instant (strictement positif) de passage en  $x$ , avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$ . Puis, de manière récursive, on introduit

$$T_x^1 = T_x, \quad T_x^{n+1} = \inf \{k > T_x^n: X_k = x\} \text{ pour } n \geq 1,$$

le  $n+1$ -ème instant de passage en  $x$ . Pour  $n \geq 1$  si  $T_x^{n-1} < +\infty$  soit  $\tau_x^n = T_x^n - T_x^{n-1}$  (avec  $T_x^0 = 0$ ).

**Proposition 15.** (REGENERATION) Soit  $x \in M$  et  $n \geq 1$ . Conditionnellement à l'événement  $\{T_x^n < +\infty\}$  la loi de  $\tau_x^{n+1}$  est indépendante de  $(T_x^1, \dots, T_x^n)$  et

$$\mathbb{P}(\tau_x^{n+1} = k | T_x^n < +\infty) = \mathbb{P}_x(T_x = k), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

**Démonstration.** Il suffit de calculer la loi jointe de l' $(n+1)$ -plet  $(T_x^1, \dots, T_x^n, \tau_x^{n+1})$ : pour tout  $1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < +\infty$ , en exploitant la propriété de Markov à l'instant  $t_n$  et l'homogénéité on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_x^1 = t_1, \dots, T_x^n = t_n, \tau_x^{n+1} = k) &= \mathbb{P}(T_x^1 = t_1, \dots, T_x^n = t_n, A_{t_{n+1}, t_n+k}) \\ &= \mathbb{P}(T_x^1 = t_1, \dots, T_x^n = t_n) \mathbb{P}(A_{t_{n+1}, t_n+k} | X_{t_n} = x) = \mathbb{P}(T_x^1 = t_1, \dots, T_x^n = t_n) \mathbb{P}_x(A_{1,k}) \\ &= \mathbb{P}(T_x^1 = t_1, \dots, T_x^n = t_n) \mathbb{P}_x(T_x = k) \end{aligned}$$

où  $A_{t,s} = \{X_i \neq x \text{ pour } t \leq i < s \text{ et } X_s = x\}$  si  $s < +\infty$  et  $A_{t,+\infty} = \{X_i \neq x, \forall i \geq t\}$ . On remarque que cette identité n'est pas vraie si  $t_n = +\infty$ . En revanche on a que

$$\mathbb{P}(T_x^1 = t_1, \dots, T_x^n = t_n, \tau_x^{n+1} = k | T_x^n < +\infty) = \mathbb{P}(T_x^1 = t_1, \dots, T_x^n = t_n | T_x^n < +\infty) \mathbb{P}_x(T_x = k)$$

pour tout  $1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq +\infty$  car  $\mathbb{P}(T_x^1 = t_1, \dots, T_x^n = t_n | T_x^n < +\infty) = 0$  si  $t_n = +\infty$ , ce qui donne la thèse.  $\square$

**Lemme 16.** Pour  $n \geq 0$  on a que  $\mathbb{P}_x(N_x \geq n) = f_x^n$  avec  $f_x = \mathbb{P}_x(T_x < +\infty)$ .

**Démonstration.** On a que  $\mathbb{P}_x(N_x \geq 0) = 1$  et que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(N_x \geq n) &= \mathbb{P}_x(T_x^n < +\infty) \\ &= \mathbb{P}_x(T_x^{n-1} < +\infty \text{ et } \tau_x^n < +\infty) \\ &= \mathbb{P}_x(T_x^{n-1} < +\infty) \mathbb{P}_x(T_x < +\infty) \quad (\text{par la Prop. 15}) \\ &= \mathbb{P}_x(N_x \geq n-1) f_x \end{aligned}$$

pour tout  $n \geq 1$ . Par récurrence on a la thèse.  $\square$

**Remarque 17.** Pour tout v.a.  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$  on a que

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{k \geq 0} 1_{k \leq X}\right] = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X \geq k) \quad (10)$$

**Théorème 18.** On a la dichotomie suivante:

- i.  $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1 \Rightarrow$  l'état  $x$  est récurrent et  $\sum_{n \geq 1} P^n(x, x) = +\infty$ ;
- ii.  $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) < 1 \Rightarrow$  l'état  $x$  est transient et  $\sum_{n \geq 1} P^n(x, x) < +\infty$ .

En particulier tout état  $x$  est soit transient, soit récurrent.

**Démonstration.** Si  $f_x = \mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1$  alors par le Lemme 16 on a que

$$\mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(N_x \geq n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_x^n = 1$$

et donc  $x$  est un état récurrent et

$$\infty = \mathbb{E}_x[N_x] = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n \geq 1} 1_{X_n = x}\right] = \sum_{n \geq 1} P^n(x, x).$$

En revanche, si  $f_x < 1$  alors, par l'eq. (10) et par le Lemme 16,

$$\sum_{n \geq 1} P^n(x, x) = \mathbb{E}_x[N_x] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x(N_x \geq n) = \sum_{n \geq 0} f_x^n = \frac{1}{1-f_x} < +\infty$$

ce qui implique aussi que  $\mathbb{P}_x(N_x = +\infty) = 0$  et donc que  $x$  est un état transient.  $\square$

**Théorème 19.** Si  $x \leftrightarrow y$  alors ils sont tous les deux du même type (soit transients, soit récurrents). Donc la récurrence ou la transience sont des propriétés des classes de communication.

**Démonstration.** Si  $x, y$  communiquent, alors il existent  $N, M$  tels que  $P^N(x, y) > 0$  et  $P^M(y, x) > 0$ . Une simple majoration donne

$$P^{2N+n+2M}(x, x) \geq P^N(x, y) P^{N+n+M}(y, y) P^M(y, x) \geq [P^N(x, y) P^M(y, x)]^2 P^n(x, x)$$

pour tout  $n \geq 1$ . Soit  $\alpha = P^N(x, y) P^M(y, x) > 0$ , alors on peut minorer

$$\sum_{k \geq 0} P^k(x, x) \geq \sum_{k \geq 2N+2M} P^k(x, x) \geq \alpha \sum_{k \geq N+M} P^k(y, y) \geq \alpha^2 \sum_{k \geq 0} P^k(x, x)$$

et donc les états  $x$  et  $y$  sont soit tous les deux transients, soit récurrents.  $\square$

**Remarque 20.** On dit alors d'une chaîne irréductible qu'elle est transiente, récurrente (car tout les états sont du même type).

**Proposition 21.** *Un ensemble  $A \subseteq M$  fermé et fini contient au moins un état récurrent. Une chaîne finie et irréductible est donc récurrente.*

**Démonstration.** Soit  $|A| < +\infty$  et supposons par absurd que pour tout  $z \in A$ ,  $\mathbb{P}_z(N_z = +\infty) = 0$ . On fixe  $x \in A$ , pour tout  $z \in A$  l'éq. (11) donne que

$$\mathbb{P}_x(N_z \geq r) = \mathbb{P}_x(T_y < +\infty) \mathbb{P}_z(N_z \geq r).$$

En prenant la limite pour  $r \rightarrow +\infty$  on obtient que

$$\mathbb{P}_x(N_z = +\infty) = \mathbb{P}_x(T_z < +\infty) \mathbb{P}_z(N_z = +\infty) = 0$$

pour tout  $z \in A$  et par conséquent

$$1 = \mathbb{P}_x(\cap_{z \in A} \{N_z < +\infty\}) = \mathbb{P}_x(\sum_{z \in A} N_z < +\infty) = \mathbb{P}_x(\sum_{n \geq 0} 1_{X_n \in A} < +\infty)$$

car  $\sum_{z \in A} N_z = \sum_{z \in A} \sum_{n \geq 0} 1_{X_n = z} = \sum_{n \geq 0} 1_{X_n \in A}$  est le temps passé dans  $A$  par la chaîne. L'ensemble  $A$  étant fermé on a que  $\mathbb{P}_x(X_n \in A) = 1$  pour tout  $n \geq 0$  et donc aussi que le temps passé dans  $A$  est infini (si on démarre de  $x \in A$ ):

$$1 = \mathbb{P}_x(\forall n \geq 0: X_n \in A) \leq \mathbb{P}_x(\sum_{n \geq 0} 1_{X_n \in A} = +\infty).$$

On obtient ainsi une contradiction.  $\square$

**Exemple 22.** Lorsque  $\mathbb{P}_x(T_x = 1) = 1$  l'état  $x$  est *absorbant*. Par exemple les états 0 et  $N$  du modèle de Wright-Fisher sont absorbants; les autres états étant transients.

**Exercice 3.** Montrer que la loi de  $N_y$  sous  $\mathbb{P}_x$  est

$$\mathbb{P}_x(N_y = r) = \begin{cases} f_{xy} f_{yy}^{r-1} (1 - f_{yy}) & \text{si } r \geq 1 \\ 1 - f_{xy} & \text{si } r = 0 \end{cases} \quad (11)$$

où  $f_{xy} = \mathbb{P}_x(T_y < +\infty)$  est la probabilité de repasser par  $y$  en démarrant de  $x$ .

**Solution.** On pose

$$A_{n,m} = \{X_i \neq y \text{ pour } n \leq i < m \text{ et } X_m = y\} \quad B_n = \{X_i \neq y \text{ pour } i \geq n\}$$

alors

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_x(T_y = k) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_x(A_{1,k}) \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{x_1, \dots, x_{k-1} \neq y} P(x, x_1) P(x_1, x_2) \cdots P(x_{k-1}, y) \end{aligned}$$

et  $\mathbb{P}_x(B_1) = 1 - f_{xy}$ . Supposons que  $r \geq 1$ , il est facile de voir que

$$\mathbb{P}_x(N_y = r) = \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r} \mathbb{P}_x(A_{1,n_1}, A_{n_1+1, n_2}, \dots, A_{n_{r-1}+1, n_r}, B_{n_r+1})$$

Donc, si on pose  $k_i = n_{i+1} - n_i \geq 1$  et on utilise la propriété de Markov et l'homogénéité on trouve

$$\mathbb{P}_x(N_y = r) = \sum_{k_1, \dots, k_r \geq 1} \mathbb{P}_x(A_{1,k_1}) \mathbb{P}_y(A_{1,k_2}) \cdots \mathbb{P}_y(A_{1,k_r}) \mathbb{P}_y(B_1) = f_{xy} (f_{yy})^{r-1} (1 - f_{yy}).$$

Quand  $r = 0$  on a  $\mathbb{P}_x(N_y = 0) = \mathbb{P}_x(B_1) = 1 - f_{xy}$ .

## 1.5 Probabilités stationnaires

**Définition 23.** Une probabilité  $\pi \in \Pi(M)$  est dite stationnaire (ou invariante) pour la matrice de transition  $P$ , si  $\pi = \pi P$ , i.e.

$$\pi(x) = \sum_{y \in M} \pi(y)P(y, x), \quad \forall x \in M. \quad (12)$$

Par récurrence, on a  $\pi = \pi P^n$  pour tout  $n \geq 1$ . Par conséquent, si l'état initial de la chaîne  $X_0$  a pour loi  $\pi$ , alors  $X_n$  a la même loi  $\pi$  que  $X_0$ ,  $\forall n \geq 1$ .

**Exemple 24.** Soient  $a, b \in [0, 1]$  et

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

alors

$$\pi = \left( \frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b} \right).$$

**Remarque 25.**

1. Il peut y avoir plusieurs probabilités stationnaires. Par exemple, la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ b & 1-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a' & a' \\ 0 & 0 & b' & 1-b' \end{pmatrix}, \quad (13)$$

avec  $a, b, a', b' \in [0, 1]$ , admet comme probabilités stationnaires tout quadruplé de la forme

$$\left( \frac{\alpha b}{a+b}, \frac{\alpha a}{a+b}, \frac{(1-\alpha)b'}{a'+b'}, \frac{(1-\alpha)a'}{a'+b'} \right), \alpha \in [0, 1].$$

2. Lorsque  $M$  est infini, il se peut aussi qu'il n'y ait pas de probabilité stationnaire. Par exemple, dans le cas de la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ , l'équation (12) devient, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ ,

$$\pi(x) = \pi(x-1)p + \pi(x+1)(1-p)$$

et on vérifie facilement (exercice) qu'il n'y a pas de probabilité satisfaisant cette équation. Par contre il existe des *mesures* (c'est à dire des mesure positives non-finie) satisfaisant cette équation, par exemple la mesure de comptage  $\pi(x) = 1, \forall x \in \mathbb{Z}$ .

**Proposition 26.** Si  $M$  est fini, alors l'ensemble  $\mathcal{I}(P)$  des probabilités stationnaires pour une matrice de transition  $P$  est un sous-ensemble non-vide, compact et convexe de  $\Pi(M)$ .

**Démonstration.**  $\Pi(M)$  est un sous-ensemble convexe, fermé et borné de  $\mathbb{R}^m$ , où  $m$  est le cardinal (fini) de  $M$  (exercice). En particulier  $\Pi(M)$  est compact.

Soit  $\mu \in \Pi(M)$  une probabilité quelconque. On considère la combinaison convexe

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu P^k.$$

Alors

$$\hat{\mu}_n P - \hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\mu P^{k+1} - \mu P^k) = \frac{1}{n} (\mu P^n - \mu) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Puisque  $\Pi(M)$  est compact, il existe une sous-suite  $\hat{\mu}_{n_k}$  de  $\hat{\mu}_n$  convergente. Soit  $\pi$  sa limite. Alors

$$\pi P = \lim_k \hat{\mu}_{n_k} P = \lim_k \hat{\mu}_{n_k} = \pi,$$

donc  $\pi$  est stationnaire.

La compacité et la convexité de  $\mathcal{I}(P)$  sont laissées en exercice. □

D'une manière générale, étant donnée une matrice de transition  $P$ , une mesure  $\mu$  satisfaisant  $\mu = \mu P$  est dite *invariante* pour  $P$ .

## 1.6 Probabilités réversibles

**Définition 27.** Une probabilité  $\pi \in \Pi(M)$  est dite réversible par rapport à  $P$  si pour tous  $x, y \in M$

$$\pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x). \quad (14)$$

**Proposition 28.** Si  $\pi$  est réversible, alors elle est stationnaire.

**Démonstration.** Exercice. □

**Exemple 29.** Si  $P$  est symétrique, i.e. si  $P(x, y) = P(y, x)$  pour tout couple  $(x, y) \in M \times M$ , et si  $M$  est fini de cardinal  $|M|$ , alors la probabilité uniforme  $\left( \frac{1}{|M|}, \dots, \frac{1}{|M|} \right)$  est réversible.

**Exercice 4.** L'URNE D'EHRENFEST.  $N$  molécules de gaz sont réparties dans un récipient divisé en deux enceintes séparées par une paroi poreuse. A chaque étape une particule choisie uniformément au hasard change d'enceinte. On note  $X_n$  le nombre de particules dans la première enceinte à l'étape  $n$ . Montrer que  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov à valeurs dans  $\{1, \dots, N\}$  de matrice de transition

$$P(i, j) = \begin{cases} \frac{N-i}{N} & \text{si } j = i + 1 \text{ et } 0 \leq i \leq N - 1 \\ \frac{i}{N} & \text{si } j = i - 1 \text{ et } 1 \leq i \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et que  $\pi$  est une probabilité réversible ssi  $\pi(i) = 2^{-N} C_N^i$ .

**Proposition 30.** Soit  $\pi$  une probabilité réversible pour  $P$  et  $X_0$  une variable aléatoire de loi  $\pi$ . On fixe  $n \in \mathbb{N}$ . Alors la suite  $\{X_j^* = X_{n-j}\}_{0 \leq j \leq n}$  est une chaîne de Markov de matrice de transition  $P$ , et  $X_0^*$  a pour loi  $\pi$ .

C'est-à-dire qu'à l'équilibre, la loi de la suite  $X_0, \dots, X_n$  est invariante par retournement de temps.

**Démonstration.** Exercice. □

## 1.7 Chaînes irréductibles

**Proposition 31.** Soit  $P$  une matrice de transition irréductible pour une chaîne de Markov et supposons qu'il existe une mesure stationnaire  $\pi$ . Alors

1.  $\pi(x) > 0$  pour tout  $x \in M$ ,
2. Pour tout  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\sum_{x \in M} \pi(x) f(x)^2 < +\infty$  on a que  $P f = f \Rightarrow f = \text{constante}$ ,
3. tout mesure stationnaire est multiple de  $\pi$  et si  $\pi$  est une probabilité stationnaire, alors elle est la seule probabilité stationnaire pour  $P$ .

**Démonstration.** Soit  $x \in M$  tel que  $\pi(x) > 0$ . Pour tout  $y \in M$ , il existe un entier  $k$  tel que  $P^k(x, y) > 0$ . Par ailleurs, par stationnarité,  $\pi = \pi P^k$ . On a donc

$$\pi(y) = \sum_{z \in M} \pi(z) P^k(z, y) \geq \pi(x) P^k(x, y) > 0,$$

ce qui prouve 1). Pour démontrer 2), on considère

$$\begin{aligned} & \sum_{x,y \in M} \pi(x)P(x,y)(f(x) - f(y))^2 \\ &= 2 \sum_{x \in M} \pi(x)f(x)^2 - 2 \sum_{x,y \in M} \pi(x)P(x,y)f(x)f(y) \\ &= 2 \sum_{x \in M} \pi(x)f(x) \left( f(x) - \sum_{y \in M} P(x,y)f(y) \right) = 0. \end{aligned}$$

On remarque que ces manipulations sont admises car

$$\sum_{x \in M} \pi(x)(Pf)(x)^2 \leq \sum_{x \in M} \pi(x)f(x)^2 < +\infty$$

par hypothèse. Donc  $\forall x, y \in M$

$$\pi(x)P(x,y)(f(x) - f(y))^2 = 0.$$

Vu (1), ceci implique que  $\forall x, y \in M$

$$P(x,y)(f(x) - f(y))^2 = 0$$

i.e.  $f(x) = f(y)$  si  $P(x,y) > 0$ . Par ailleurs, puisque la chaîne est irréductible,  $\forall x, y \in M$ , il existe un chemin  $x_0 = x, x_1, \dots, x_k = y$  tel que  $P(x_i, x_{i-1}) > 0 \forall 1 \leq i \leq k$ , et donc  $f(x) = f(x_1) = \dots = f(y)$ . Enfin, pour montrer l'unicité 3) (à moins d'un facteur constante), considérons une mesure  $\nu$  (donc  $\nu = \nu P$ ). On pose

$$Q(x,y) = P(y,x) \frac{\pi(y)}{\pi(x)} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\nu(x)}{\pi(x)}.$$

Alors  $Q$  est une matrice de transition irréductible (exercice) et  $Qf = f$ . Donc  $f$  est constante et on en déduit que  $\nu(x) = c\pi(x)$  pour tout  $x \in M$ . Si  $\nu$  et  $\pi$  sont des mesures de probabilité alors  $c = 1$  et on a l'unicité.  $\square$

## 1.8 Excursions

Pour tous  $x, y \in M$ , on compte le nombre de passages en  $y$  avant de toucher  $x$  pour la première fois :

$$N_x^y = \sum_{n=0}^{T_x-1} 1_{[X_n=y]}. \quad (15)$$

**Remarque 32.**

1. Si  $X_0 = x$ , alors  $N_x^x = 1$ .
2. Si  $X_0 \neq x$ , alors  $N_x^x = 0$ .
3.  $\sum_{y \in M} N_x^y = T_x$ .

On introduit ensuite, pour tout  $x, y \in M$

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x[N_x^y] = \mathbb{E}_x \left[ \sum_{n \geq 0} 1_{T_x > n, X_n = y} \right] \quad (16)$$

On voit que pour tout  $x \in M$ ,  $\mu_x$  définit une mesure positive sur  $M$  (qui n'est pas une probabilité en général), et que

$$\mu_x(M) = \sum_{y \in M} \mu_x(y) = \mathbb{E}_x(T_x) \in [0, \infty]. \quad (17)$$

**Proposition 33.** *Pour tout  $x \in M$  recurrent,  $\mu_x$  est une mesure stationnaire, i.e.*

$$\mu_x(y) = \sum_{z \in M} \mu_x(z)P(z,y).$$

**Démonstration.** Il faut d'abord remarquer que

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n \geq 0} 1_{T_x > n, X_n = y}\right] = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n \geq 1} 1_{T_x \geq n, X_n = y}\right]$$

car  $\mathbb{P}_x(T_x < \infty, X_0 = X_{T_x} = x) = 1$ . On note aussi que  $\{T_x \geq n\} \in \sigma(X_0, \dots, X_{n-1}) = \mathcal{F}_{n-1}$  ce qui nous permet de montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[1_{T_x \geq n} 1_{X_n = y} 1_{X_{n-1} = z}] &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}[1_{T_x \geq n} 1_{X_n = y} 1_{X_{n-1} = z} | \mathcal{F}_{n-1}]] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}[1_{X_n = y} | \mathcal{F}_{n-1}] 1_{T_x \geq n} 1_{X_{n-1} = z}] \quad (\{T_x \geq n\} \in \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}[1_{X_n = y} | X_{n-1}] 1_{T_x \geq n} 1_{X_{n-1} = z}] \quad (\text{Markov}) \\ &= \mathbb{E}_x[P(X_{n-1}, y) 1_{T_x \geq n} 1_{X_{n-1} = z}] \quad (\text{Def. de } P) \\ &= P(z, y) \mathbb{E}_x[1_{T_x \geq n} 1_{X_{n-1} = z}] \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \mu_x(y) &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_x[1_{T_x \geq n, X_n = y} \sum_{z \in M} 1_{X_{n-1} = z}] \quad (\text{car } \sum_{z \in M} 1_{X_{n-1} = z} = 1) \\ &= \sum_{x \in M} \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}_x[1_{T_x \geq n} 1_{X_n = y} 1_{X_{n-1} = z}] \\ &= \sum_{x \in M} \sum_{n \geq 1} P(z, y) \mathbb{E}_x[1_{T_x \geq n} 1_{X_{n-1} = z}] \\ &= \sum_{x \in M} P(z, y) \underbrace{\sum_{k \geq 0} \mathbb{E}_x[1_{T_x > k} 1_{X_k = z}]}_{= \mu_x(z) \text{ (par l'eq. (16))}} \quad (\text{où on pose } k = n - 1) \\ &= \sum_{z \in M} P(x, z) \mu_x(z) \end{aligned}$$

□

**Corollaire 34.** Si  $P$  est irréductible et récurrent, alors  $\mu_x(y) < \infty \forall x, y \in M$ .

**Démonstration.**  $P$  est irréductible, donc pour tous  $x, y \in M$ , il existe un entier  $k$  tel que  $P^k(y, x) > 0$ . Alors,

$$1 = \mu_x(x) = \sum_{z \in M} \mu_x(z) P^k(z, x) \geq \mu_x(y) P^k(y, x)$$

donc

$$\mu_x(y) \leq (P^k(y, x))^{-1} < \infty. \quad \square$$

**Définition 35.** On dit que l'état  $x \in M$  est récurrent positif si  $\mathbb{E}_x[T_x] < +\infty$ . Un état récurrent tel que  $\mathbb{E}_x[T_x] = +\infty$  est appelé récurrent nul.

Remarquons qu'il résulte de la formule (17), qu'un état  $x \in M$  récurrent est récurrent positif si et seulement si  $\mu_x$  est une mesure finie ( $\mu_x(M) < +\infty$ ). Par conséquent,

**Corollaire 36.** Si  $|M| < \infty$  et  $P$  est irréductible, la chaîne est récurrente positive, i.e.  $\mathbb{E}_x(T_x) < \infty$  pour tout  $x \in M$ .

Soit maintenant  $x$  un état récurrent positif. On peut définir la probabilité sur  $M$

$$\pi_x(y) = \frac{\mu_x(y)}{\mu_x(M)} = \frac{\mu_x(y)}{\mathbb{E}_x(T_x)}, \quad \forall y \in M. \quad (18)$$

D'après la Proposition (33),  $\pi_x$  est une probabilité stationnaire. Par ailleurs, si  $P$  est irréductible, on sait, d'après la Proposition 31, qu'il existe une seule probabilité stationnaire et que tous les états sont récurrents (car au moins l'état  $x$  est récurrent). Cela signifie que on peut définir une mesure invariante  $\mu_y$  pour tout  $y \in M$  et par irréductibilité que  $\mu_y(z) = C_{x,y} \mu_x(z)$  (car les mesures invariantes d'une chaîne irréductible sont toutes proportionnelles). Pour la récurrence positive de  $x$  on a que  $\mathbb{E}_y[T_y] = \sum_{z \in M} \mu_y(z) = C_{x,y} \sum_{z \in M} \mu_x(z) = C_{x,y} \mathbb{E}_x[T_x] < +\infty$  et donc que  $\mathbb{E}_y[T_y] < +\infty$  et que tout état  $y \in M$  est récurrent positif. On peut définir  $\pi_y(z) = \mu_y(z) / \mathbb{E}_y[T_y]$  et par irréductibilité on obtient que  $\pi_x = \pi_y$  pour tout  $y \in M$ . Dans ce cas,  $\pi_x(z)$  ne dépend pas de  $x$  et on peut écrire  $\pi(z) = \pi_x(z)$  pour tout  $x \in M$  et donc  $\pi(x) = \pi_x(x) = \mu_x(x) / \mathbb{E}_x[T_x] = 1 / \mathbb{E}_x[T_x]$ . D'où le résultat suivant.

**Proposition 37.** *Si  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  est une chaîne irréductible avec au moins un état récurrent positif, alors tous les états sont récurrents positifs et*

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x)} > 0 \quad (19)$$

est l'unique probabilité stationnaire. De plus,

$$\mathbb{E}_x(N_x^y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)}. \quad (20)$$

**Exemple 38.** On peut montrer que dans le cas de la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ , la chaîne est

- (a) transiente si  $p \neq 1/2$
- (b) récurrente nulle si  $p = 1/2$ .

**Exemple 39.** Par le Corollaire (36) dans le modèle de l'urne d'Ehrenfest, la chaîne est récurrente positive (espace d'états fini et chaîne irréductible).

## 2 Le théorème ergodique

**Corollaire 40.** *Soit  $N_x = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[X_n=x]}$ . Alors si  $x$  est transient*

$$\mathbb{P}_x(N_x = k) = (1-a)a^{k-1}, \quad k \geq 1, \quad a = \mathbb{P}_x(T_x < \infty) < 1 \quad (21)$$

et si  $x$  est récurrent on a  $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 1$ .

**Démonstration.**

$$\mathbb{P}_x(N_x = k) = \mathbb{P}_x(T_x^{i+1} - T_x^i < \infty, i = 0, \dots, k-1; T_x^{k+1} - T_x^k = \infty) = (1-a)a^{k-1}$$

□

**Théorème 41.** *Soit  $P$  une matrice irréductible récurrente positive et  $\pi$  sa probabilité stationnaire. Alors pour tout  $x, y \in M$*

$$\mathbb{P}_x \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{[X_k=y]} = \pi(y) \right) = 1. \quad (22)$$

**Démonstration.** Par la récurrence on a que  $T_y^k < +\infty$  pour tout  $k \geq 1$ , donc les v.a.  $\tau_y^k = T_y^{k+1} - T_y^k$  sont bien définies pour tout  $k \geq 1$  et par le théorème de régénération on a que la suite  $(\tau_y^k)_{k \geq 1}$  est iid et tel que  $\mathbb{P}_x(\tau_y^k = m) = \mathbb{P}_y(T_y = m)$ . D'après la loi des grands nombres

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k-1} \tau_{y_{k \rightarrow \infty}}^i \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}_y(T_y) = \frac{1}{\pi(y)} \quad \mathbb{P}_x - p.s.$$

et  $\mathbb{P}_x(T_y < +\infty) = 1$  donc

$$\frac{1}{k} T_y^k = \frac{1}{k} \left( \sum_{i=1}^{k-1} \tau_y^i + T_y \right) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}_y(T_y^1) = \pi(y)^{-1} \quad \mathbb{P}_x - p.s.$$

Par ailleurs, si pour tout  $n \geq 1$  on pose  $N_y^n = \sum_{k=0}^{n-1} 1_{[X_k=y]}$  alors on a que

$$T_y^{N_y^n} \leq n \leq T_y^{N_y^n + 1}$$

et donc

$$\frac{N_y^n}{T_y^{N_y^n + 1}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{[X_k=y]} \leq \frac{N_y^n}{T_y^{N_y^n}}.$$

D'où le résultat. □

**Remarque 42.** En modifiant légèrement cette preuve, on obtient le résultat plus général suivant.

**Corollaire 43.** Soit  $P$  une matrice irréductible récurrente positive et  $\pi$  sa probabilité stationnaire. Soit  $f$  une fonction dans  $L^1(\pi)$ , i.e.  $\sum_{x \in M} |f(x)|\pi(x) < \infty$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{x \in M} f(x)\pi(x) \quad \mathbb{P}_x - p.s.$$

### 3 Convergence vers l'équilibre

Un corollaire du théorème ergodique est que lorsque  $P$  est une matrice de transition irréductible récurrente positive de probabilité invariante  $\pi$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu P^j \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \pi,$$

pour toute probabilité  $\mu \in \Pi(M)$ . Ceci n'implique pas en général que  $\mu P^n \rightarrow \pi$  :

**Exemple 44.** La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a pour loi stationnaire  $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et comme puissances

$$P^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc  $\mu P^n = \mu$  si  $n$  est pair et  $\mu P^n = \mu P$  si  $n$  est impair et on voit que  $\mu P^n$  ne converge pas vers  $\pi$ .

Une condition assez générale sur  $P$  pour la convergence  $\mu P^n \rightarrow \pi$  est déterminé par la notion de irréductibilité forte.

**Définition 45.** Une matrice de transition  $P$  est dite fortement irréductible s'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tous  $x, y \in M$  on ait  $P^{n_0}(x, y) > 0$ .

**Proposition 46.** Si  $|M| < \infty$  et si  $P$  est fortement irréductible, alors pour tout probabilité  $\mu \in \Pi(M)$  on a que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu P^n = \pi$$

(la limite existe et elle est l'unique probabilité invariante).

**Démonstration.** (admise). □

**Exemple 47.**

1. La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas fortement irréductible.

2. La matrice

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas irréductible.

3. La matrice

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est fortement irréductible si  $0 < p < 1$ .