TD1. Espérance conditionnelle. Corrigé.

Exercice 1 Soient X une v.a. intégrable définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

1. $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ est une v.a. $\mathcal{B}$-mesurable telle que $\mathbb{E}(1_A \mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(1_A X)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$. Elle est unique à égalité p.s. près.
2. On a :
   a) $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})\right) = \mathbb{E}\left(X\right)$.
   b) Si X et $\mathcal{B}$ sont indépendantes, $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X)$.
   c) Si Y est une v.a. $\mathcal{B}$-mesurable et si XY et X sont intégrables, $\mathbb{E}(YX|\mathcal{B}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$.
   d) Pour toute v.a. Z $\mathcal{B}$-mesurable et bornée, $\mathbb{E}\left(Z\mathbb{E}(X|\mathcal{B})\right) = \mathbb{E}[ZX]$.

Exercice 2 Comme $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$ est $\mathcal{B}_1$-mesurable et $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$, $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$ est également $\mathcal{B}_2$-mesurable, ce qui prouve la première égalité. Pour établir la deuxième égalité, il suffit de prouver que pour tout $A \in \mathcal{B}_1$,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2)1_A) = \mathbb{E}(X1_A)$$

(c'est la définition de $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$!). Soit $A \in \mathcal{B}_1$. Par définition de $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{B}_2)$, et comme $A \in \mathcal{B}_2$, on a

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2)1_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)1_A).$$

En utilisant cette fois la définition de $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{B}_1)$, on obtient $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)1_A) = \mathbb{E}(X1_A)$, ce qui termine la preuve.

Exercice 3 Soit $\{A_1, A_2, \ldots\}$ une partition (finie ou infinie) de Ω. Soit $\mathcal{B} = \sigma(A_1, \ldots)$ la tribu engendrée par cette partition.

a) La tribu $\mathcal{B}$ est la collection des $\cup_{i\in I} A_i$, pour $I \subseteq \mathbb{N}$ (qui contient l'ensemble vide, lorsque l'on choisit $I = \emptyset$). C'est une tribu qui contient les $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et toute tribu contenant les $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ contient $\mathcal{B}$.

b) Soit $X \in L^1(\Omega)$. Il suffit de montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}$,

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j:\mathbb{P}(A_j)>0} \frac{\mathbb{E}(X1_{A_j})}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j}\Big)1_A\Big] = \mathrm{E}(X1_A). \tag{1}$$

Soit $A \in \mathcal{B}$. D'après (a) il existe $I \subseteq \mathbb{N}$ tel que $A = \cup_{i\in I} A_i$. En utilisant Fubini-Tonelli, on peut échanger l'espérance et la somme, pour écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j:\mathbb{P}(A_j)>0} \frac{\mathbb{E}(X1_{A_j})}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j}\Big)1_A\Big] &= \mathbb{E}\Big(\sum_{\substack{j:\mathbb{P}(A_j)>0\\ i\in I}} \frac{\mathbb{E}(X1_{A_j})}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_i\cap A_j}\Big) \\
&= \sum_{\substack{j:\mathbb{P}(A_j)>0\\ i\in I}} \frac{\mathbb{E}(X1_{A_j})}{\mathbb{P}(A_j)} \mathbb{P}(A_j \cap A_i) \\
&= \sum_{\substack{j:\mathbb{P}(A_j)>0\\ i\in I}} \frac{\mathbb{E}(X1_{A_j})}{\mathbb{P}(A_j)} \times 1_{\{i=j\}}\mathbb{P}(A_j). \qquad (2) \\
&= \sum_{\substack{i:\mathbb{P}(A_i)>0\\ i\in I}} \mathbb{E}(X1_{A_i}) \\
&= \mathbb{E}(X1_A).
\end{aligned}$$

Autre solution : comme $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ est $\mathcal{B}$-mesurable, en déduire qu'il existe $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j 1_{A_j}$, puis identifier les (a_j) en utilisant la propriété qui définit l'espérance conditionelle.

Exercice 4 On suppose g intégrable. Notons qu'une fonction h telle que décrite par l'énoncé existe. Il suffit de choisir

$$h(x) = \frac{\int g(y) f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y}{\int f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y} 1_{\{\int f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y \neq 0\}}, \qquad (3)$$

qui est mesurable d'après Fubini-Tonelli. Il suffit de prouver que pour toute fonction test (fonction mesurable et bornée) $\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(h(X)\varphi(X)) = \mathbb{E}(g(Y)\varphi(X))$. Soit φ une fonction test.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(X)\varphi(X)) &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\varphi(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^m} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^m} g(y) f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \qquad (4) \\
&= \mathbb{E}(g(Y)\varphi(X)).
\end{aligned}$$

En toute rigueur, il faut d'abord vérifier que $h(X)\varphi(X)$ est intégrable (faire le même calcul avec les valeurs absolues, utiliser Fubini-Tonelli et à la fin utiliser l'intégrabilité de $g(Y)$).

Exercice 5

a) Par indépendance de X_1 et X_2, la densité du couple (X_1, X_2) est la densité produit $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = e^{-x_1-x_2} 1_{x_1\geq 0, x_2\geq 0}$. Pour calculer $\mathbb{E}(f(X_1)|Y)$, on peut utiliser l'exercice 4. Déterminons $f_{X_1,Y}$ la densité du couple (X_1, Y). Soit φ : $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction test. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(X_1, Y)) &= \mathbb{E}(\varphi(X_1, X_1 + X_2)) \\ &= \int\int \varphi(x_1, x_1 + x_2) e^{-(x_1+x_2)} 1_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.\end{aligned} \tag{5}$$

Par le changement de variable $(x, y) = \Phi(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2)$, on obtient (noter que Φ est bijective et $|\det(D\Phi)| = 1$) :

$$\mathbb{E}(\varphi(X_1, Y)) = \int\int \varphi(x, y) 1_{\{0 \leq x \leq y\}} e^{-y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \tag{6}$$

D'où $f_{X_1,Z}(x, y) = 1_{\{0 \leq x \leq y\}} e^{-y}$. On peut maintenant calculer :

$$\int_{\mathbb{R}} f_{X_1,Z}(x, y) \mathrm{d}x = e^y \, y 1_{\{y \geq 0\}}. \tag{7}$$

Et donc

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} f(x) f_{X_1,Y}(x, y) \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}} f_{X_1,Y}(x, y) \mathrm{d}x} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1_{\{0 \leq x \leq y\}}}{y} \mathrm{d}x. \tag{8}$$

D'après l'exercice 4, $\mathbb{E}(f(X_1)|Y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1_{\{0 \leq x \leq Y\}}}{Y} \mathrm{d}x \, 1_{\{Y>0\}}$. En d'autres termes, conditionnellement à Y, X_1 suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, Y]$.

b) Comme pour le (a), on peut utiliser l'exercice 4. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction test.

$$\mathbb{E}(\varphi(X, Z)) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, xy) 1_{\{0 < x, y \leq 1\}} \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \tag{9}$$

En utilisant le changement de variable $(x, z) = \Phi(x, y) = (x, xy)$ et en notant que $|\det(D\Phi)| = x$, on obtient

$$\mathbb{E}(\varphi(X, Z)) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, z) 1_{\{0 < z \leq x \leq 1\}} \frac{\mathrm{d}x}{x} \mathrm{d}z, \tag{10}$$

et donc la densité du couple (X, Z) est $f_{X,Z}(x, z) = \frac{1}{x} 1_{\{0 < z \leq x \leq 1\}}$. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} f_{X,Z}(x, z) \mathrm{d}x = \ln(1/z), \quad \int_{\mathbb{R}} x f_{X,Z}(x, z) \mathrm{d}x = (1 - z), \tag{11}$$

d'où $\mathbb{E}(X|Z) = \frac{1-Z}{\ln(1/Z)}(1_{Z \in (0,1)})$. Comme les variables X et Y jouent des rôles symétriques dans l'expression de Z, $\mathbb{E}(Y|Z) = \mathbb{E}(X|Z)$.

c) On a $\mathbb{E}(X^3|X^2) = 0$ par symétrie de la loi normale par rapport à 0. En effet, pour toute fonction test φ, $\mathbb{E}(X^3\varphi(X^2)) = \mathbb{E}((-X)^3\varphi((-X)^2))$, donc $\mathbb{E}(X^3\varphi(X^2)) = 0$.

Exercice 6 On commence par calculer $\mathbb{E}\,[Z\,|X]$. Sur l'événement $\{X<t\}$, on sait que $X=Z$ tandis que sur l'événement $\{X=t\}$, on sait que $Z>t$. On va donc prouver que

$$\mathbb{E}(Z|X) = X1_{\{X<t\}} + \mathbb{E}(Z|Z>t)1_{\{X=t\}}, \quad \text{où} \quad \mathbb{E}(Z|Z>t) := \frac{\mathbb{E}(Z1_{\{Z>t\}})}{\mathbb{P}(Z>t)}. \tag{12}$$

En effet, pour toute fonction test $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\varphi(X)\{X1_{\{X<t\}} + \mathbb{E}(Z|Z>t)1_{\{X=t\}}\}] \\
&\qquad = \mathbb{E}[\varphi(X)X1_{\{X<t\}}] + \mathbb{E}[\mathbb{E}(Z|Z>t)\varphi(X)1_{\{X=t\}}] \\
&\qquad = \mathbb{E}[\varphi(X)Z1_{\{X<t\}}] + \mathbb{E}\big[\frac{\mathbb{E}(Z1_{\{Z>t\}})}{\mathbb{P}(Z>t)}\varphi(t)1_{\{Z>t\}}\big] \\
&\qquad = \mathbb{E}[\varphi(X)Z1_{\{X<t\}}] + \varphi(t)\mathbb{E}(Z1_{\{Z>t\}}) \\
&\qquad = \mathbb{E}[\varphi(X)Z1_{\{X<t\}}] + \mathbb{E}(Z\varphi(X)1_{\{X<t\}}) \\
&\qquad = \mathbb{E}(Z\varphi(X)).
\end{aligned} \tag{13}$$

Il reste à calculer

$$\mathbb{E}(Z|Z>t) = \frac{\mathbb{E}(Z1_{\{Z>t\}})}{\mathbb{P}(Z>t)} = \frac{\int_t^{+\infty} ze^{-z}\mathrm{d}z}{\int_t^{+\infty} e^{-z}\mathrm{d}z} = t+1, \tag{14}$$

(l'intégrale au numérateur se calcule par intégration par parties). D'où :

$$\mathbb{E}(Z|X) = X1_{\{X<t\}} + (t+1)1_{\{X=t\}}. \tag{15}$$

Remarque : on peut aussi prouver que conditionnellement à $Z>t$, $Z-t$ suit une loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, $\mathbb{E}(Z|Z>t) = t + \mathbb{E}(Z-t|Z>t) = t+1$.

Exercice 7

1. On procède par l'absurde. Supposons que $\sigma(S_2) = \sigma(X_1, X_2)$. Comme $X_1 - X_2$ est $\sigma(X_1,X_2)$-mesurable, c'est aussi $\sigma(S_2)$-mesurable, et donc il existe une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $X_1 - X_2 = f(S_2) = f(S_0X_1X_2)$. Ainsi, $f(S_0ud) = d-u = u-d$, ce qui est absurde car $d>u$.
2. On a d'une part $\mathbb{E}[S_2|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[S_0X_1X_2|\mathcal{F}_1] = S_0X_1\mathbb{E}[X_2|\mathcal{F}_1] = S_0X_1\mathbb{E}[X_2] = S_0X_1(up+d(1-p))$, et d'autre part $\mathbb{E}[S_2|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[S_2] = S_0(u^2p^2+2udp(1-p)+d^2(1-p)^2)$. On vérifie bien que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[S_2|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[[\mathbb{E}[S_2|\mathcal{F}_1]] = S_0\mathbb{E}(X_1)(up+d(1-p)) = S_0(up+d(1-p))^2 = S_0(u^2p^2+2udp(1-p)+d^2(1-p)^2) = \mathbb{E}(S_2)$.
3. On peut prouver que $\mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_k] = S_k(up+d(1-p))^{n-k}$. Il suffit de remarquer que $S_n = S_k \times \prod_{i=k+1}^n X_i$, que S_k est $\mathcal{F}_k$-mesurable et que les $(X_i)_{k<i\leq n}$ sont indépendants entre eux et indépendants de $\mathcal{F}_k$, et d'espérance $(up+d(1-p))$.

Exercice 8 Notons $Y = X_1 + \ldots + X_n$. Par symétrie des $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ dans l'expression de Y, il est clair, au moins intuitivement, que

$$\mathbb{E}(X_1|Y) = \mathbb{E}(X_2|Y) = \ldots = \mathbb{E}(X_n|Y). \tag{16}$$

Or,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i|Y) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i|Y) = \mathbb{E}(Y|Y) = Y, \tag{17}$$

ce qui nous donne $\mathbb{E}(X_1|Y) = Y/n$. Prouvons-le. Soit $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction test. On a bien

$$\mathbb{E}\left(\frac{Y}{n}\varphi(Y)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i\varphi(Y)) = \mathbb{E}(X_1\varphi(Y)), \tag{18}$$

où l'on a utilisé que pour toute permutation τ de $\{1, \dots, n\}$, le vecteur aléatoire $(X_{\tau(1)}, X_{\tau(2)}, \dots, X_{\tau(n)})$ a même loi que $(X_1, \dots, X_n)$.

Exercice 9 On rappelle que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X^2|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(X^2)$. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|\mathcal{F})) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})^2) \\ \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})^2) - \mathbb{E}(X)^2. \end{aligned} \tag{19}$$

En sommant ces dux termes, on trouve bien $\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathrm{Var}(X)$.

Exercice 10 On donne les informations suivantes sur la loi $\mathcal{B}(a, b)$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a+b}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}. \tag{20}$$

On rappelle également qu'une variable binomiale de paramètres (n, p) a pour espérance np et variance $np(1-p)$. On a alors

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(nX) = \frac{an}{(a+b)}. \tag{21}$$

D'autre part, en utilisant l'exercice 9, on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= \mathbb{E}(\mathrm{Var}(Y|X)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y|X)) \\ &= \mathbb{E}(nX(1-X)) + \mathrm{Var}(nX) \\ &= n\frac{a}{a+b} - n\Big(\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} + \frac{a^2}{(a+b)^2}\Big) + n^2\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \\ &= \frac{n\,a\,b\,(a+b+n)}{(a+b)^2(a+b+1)} \end{aligned} \tag{22}$$

Exercice 11 Comme $\mathbb{P}(X = i|Y = 0) = \frac{\mathbb{P}(X=i,Y=0)}{\mathbb{P}(Y=0)}$, il suffit de calculer les

$$\mathbb{P}(X = i, Y = 0)$$

pour $1 \leq i \leq 6$, que l'on renormalisera ensuite pour obtenir une probabilité sur $\{1, \dots, 6\}$. On a

$$\mathbb{P}(X = i, Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 0 | X = i)\mathbb{P}(X = i) = 2^{-i} \times \frac{1}{6}. \tag{23}$$

On en déduit que pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$.

$$\mathbb{P}(X = i | Y = 0) = \frac{2^{-i}}{2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-6}} = \frac{64}{63} \times 2^{-i}. \tag{24}$$

Exercice 12 On va ici directement identifier la loi de X_0 sachant $X_1, \dots, X_n$, dont on déduira $\mathbb{E}(X_0 | X_1, \dots, X_n)$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue bornée et $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction test. On a

$$\mathbb{E}(\varphi(X_0) h(X_1, \dots, X_n)) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \varphi(x_0) h(x_1, \dots, x_n) \frac{e^{-\frac{1}{2} x \Gamma^{-1} x^t}}{\sqrt{2\pi \det(\Gamma)}} \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n, \tag{25}$$

où $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ et x^t est le vecteur transposé (vecteur colonne). On remarque que

$$\begin{aligned} x \Gamma^{-1} x^t &= \sum_{i,j=0}^{n} x_i (\Gamma^{-1})_{ij} x_j \\ &= (\Gamma^{-1})_{00} x_0^2 + 2 x_0 \sum_{i=1}^{n} (\Gamma^{-1})_{0i} x_i + r(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{26}$$

où $r(x_1, \dots, x_n)$ est un terme ne dépendant pas de x_0. On peut donc montrer qu'il existe une fonction g mesurable telle que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\varphi(X_0) h(X_1, \dots, X_n)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x_1, \dots, x_n) g(x_1, \dots, x_n) \Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x_0) e^{-\frac{(\Gamma^{-1})_{00}}{2} \left(x_0 + \sum_{i=1}^n (\Gamma^{-1})_{0i} x_i \right)^2} \mathrm{d}x_0 \Big) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n, \end{aligned} \tag{27}$$

dont on déduit

$$\mathbb{E}(\varphi(X_0) h(X_1, \dots, X_n)) = g(X_1, \dots, X_n) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_0) e^{-\frac{(\Gamma^{-1})_{00}}{2} \left(x_0 + \sum_{i=1}^n \frac{(\Gamma^{-1})_{0i}}{\Gamma^{-1})_{00}} X_i \right)^2} \mathrm{d}x_0, \tag{28}$$

ce qui signifie que conditionnellement à $(X_1, \dots, X_n)$, X_0 suit une loi normale de moyenne $-\sum_{i=1}^n \frac{(\Gamma^{-1})_{0i}}{(\Gamma^{-1})_{00}} X_i$ et variance $1/(\Gamma^{-1})_{00}$. En particulier,

$$\mathbb{E}(X_0 | X_1, \dots, X_n) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(\Gamma^{-1})_{0i}}{(\Gamma^{-1})_{00}} X_i. \tag{29}$$