TD 2 : éléments de corrections

5 novembre 2014

Exercice 1. — a) Les variables aléatoires $S \wedge T$ et $S \vee T$ sont à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{S \wedge T \leq n\} = \{S \leq n\} \cup \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ et $\{S \vee T \leq n\} = \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$. Ce sont donc des temps d'arrêts.

b) La v.a. T est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, en remarquant que pour $0 \leq k \leq n$, $\{X_k \notin B\} = \{X_k \in B\}^c \in \mathscr{F}_k$, on a

$$\{T = n\} = \underbrace{\{X_n \in B\}}_{\in \mathscr{F}_n} \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} \underbrace{\{X_k \notin B\}}_{\in \mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n.$$

C'est donc un temps d'arrêt.

c) La v.a. T est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, en remarquant que $\{X_k < Y_{k-1}\} = (Y_{k-1} - X_k)^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \in \mathscr{F}_k$ car Y_{k-1} est $\mathscr{F}_{k-1}$−mesurable et donc $\mathscr{F}_k$−mesurable et X_k aussi, on a

$$\{T = n\} = \underbrace{\{X_n \geq Y_{n-1}\}}_{\in \mathscr{F}_n} \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} \underbrace{\{X_k < Y_{k-1}\}}_{\in \mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n.$$

On en déduit que T est un temps d'arrêt.
De plus, comme $Y_n = X_n$ si $T = n$, on a $Y_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} = \sum_{k\geq 1} Y_n \mathbf{1}_{\{T=n\}} = \sum_{k\geq 1} X_n \mathbf{1}_{\{T=n\}} = X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$.

d) La v.a. U est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{U = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{\left(\underbrace{\{T = k\}}_{\in \mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}_n} \cap \underbrace{\{S = n - k\}}_{\in \mathscr{F}_{n-k} \subset \mathscr{F}_n} \right)}_{\in \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n.$$

C'est un temps d'arrêt.

e) La v.a. T est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\{T > n\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{T_k > n\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{T_k \leq n\}^c \in \mathscr{F}_n.$$

C'est donc aussi un temps d'arrêt.

Exercice 2. —
Soit $n \in \mathbb{N}$, W_n est $\mathscr{F}_n$−mesurable (comme fonction continue en les $(Y_i)_{0\leq i\leq n}$) et comme $|S_n| \leq n$, on a

$$\mathbb{E}[|W_n|] \leq \mathbb{E}[|S_n|] + \left|2p - 1\right| n \leq n + \left|2p - 1\right| n < \infty,$$

c'est à dire $W_n \in L^1$. De plus,

$$\mathbb{E}[W_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = S_n - (2p - 1)(n + 1) + \mathbb{E}[Y_{n+1}] = W_n$$

car Y_{n+1} est indépendante de $\mathscr{F}_n$ et $\mathbb{E}[Y_{n+1}] = 2p-1$. Donc $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$−martingale.

Soit $n \in \mathbb{N}$, M_n est $\mathscr{F}_n$−mesurable (comme fonction continue de S_n, qui est $\mathscr{F}_n$−mesurable) et comme $-n \le S_n \le n$, on a

$$0 \le \mathbb{E}[M_n] \le \left(\frac{1-p}{p}\right)^n \vee \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-n} < \infty$$

c'est à dire $M_n \in L^1$. De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} \times \left(\frac{1-p}{p}\right)^{Y_{n+1}} \middle| \mathscr{F}_n\right] \\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{Y_{n+1}} \middle| \mathscr{F}_n\right] \text{ car } S_n \text{ est } \mathscr{F}_n\text{−mesurable} \\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{Y_{n+1}}\right] \text{ car } Y_{n+1} \text{ est indépendante de } \mathscr{F}_n \\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} \text{ car } \mathbb{E}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{Y_{n+1}}\right] = \left(\frac{1-p}{p}\right) \times p + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-1} \times (1-p) = 1 \\
&= M_n,
\end{aligned}$$

Donc $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$−martingale.

Exercice 3. —
Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $\{T > n\} = \{T \le n\}^c \in \mathscr{F}_n$ donc $\mathbf{1}_{\{T>n\}}$ est $\mathscr{F}_n$−mesurable et donc Z_n est $\mathscr{F}_n$−mesurable comme somme et produit de variable aléatoires mesurables. Comme $X_n, Y_n \in L^1$, on a

$$\mathbb{E}[|Z_n|] \le \mathbb{E}[|X_n|] + \mathbb{E}[|Y_n|] < \infty,$$

c'est à dire $Z_n \in L^1$. De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] &= \mathbb{E}\left[X_{n+1}\mathbf{1}_{\{T>n+1\}} + Y_{n+1}\mathbf{1}_{\{T\le n+1\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{n+1} \times \left(\mathbf{1}_{\{T>n\}} - \mathbf{1}_{\{T=n+1\}}\right) + Y_{n+1} \times \left(\mathbf{1}_{\{T\le n\}} + \mathbf{1}_{\{T=n+1\}}\right) \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n]}_{\le X_n \text{ car sur-martingale}} \mathbf{1}_{\{T>n\}} + \underbrace{\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n]}_{\le Y_n \text{ car sur-martingale}} \mathbf{1}_{\{T\le n\}} + \mathbb{E}\left[\underbrace{(Y_T - X_T)\mathbf{1}_{\{T=n+1\}}}_{\le 0 \text{ par hypothèse}} \middle| \mathscr{F}_n\right] \\
&\le X_n\mathbf{1}_{\{T>n\}} + Y_n\mathbf{1}_{\{T\le n\}} = Z_n.
\end{aligned}$$

Donc $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$−sur-martingale.

Exercice 4. —
Soit $n \in \mathbb{N}$, $M_n^2 - A_n$ est $\mathscr{F}_n$−mesurable (A_n est même $\mathscr{F}_{n-1}$−mesurable). De plus, A_n est intégrable comme somme de variables aléatoires intégrables (ce sont des espérances conditionnelles). Donc la v.a. $M_n^2 - A_n$ est intégrable. Enfin

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}^2 - A_{n+1} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[M_n^2 - A_n + M_{n+1}^2 - M_n^2 - \mathbb{E}\left[\Delta M_{n+1}^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right] \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right] = M_n^2 - A_n.$$

Donc $(M_n^2 - A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$−martingale.

Exercice 5. —a) $\Longrightarrow$ b) Soit T un temps d'arrêt borné, par exemple par $N_0 \in \mathbb{N}$. Il est clair que $X_{n\wedge T} \xrightarrow[n\to\infty]{} X_T$ et $|X_{n\wedge T}| \le \sum_{k=0}^{N_0} |X_k|$. On déduit du théorème de convergence dominé (car $\sum_{k=0}^{N_0} |X_k|$ est intégrable) que $X_T \in L^1$ et $\mathbb{E}[X_{n\wedge T}] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X_T]$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n\wedge T} = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \mathbf{1}_{\{T=k\}} + X_n \mathbf{1}_{\{T\geq n\}}$ est $\mathscr{F}_n$−mesurable (car X_k est $\mathscr{F}_k$−mesurable, $\{T \geq n\} = \{T \leq n-1\}^c \in \mathscr{F}_{n-1}$) et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{(n+1)\wedge T} \mid \mathscr{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n} X_k \mathbf{1}_{\{T=k\}} + X_{n+1}\mathbf{1}_{\{T\geq n+1\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} X_k \mathbf{1}_{\{T=k\}} + \mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n\right]\mathbf{1}_{\{T\geq n+1\}} \text{ par } \mathscr{F}_n\text{−mesurabilité} \\
&= \sum_{k=0}^{n} X_k \mathbf{1}_{\{T=k\}} + X_n \mathbf{1}_{\{T\geq n+1\}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} X_k \mathbf{1}_{\{T=k\}} + X_n \mathbf{1}_{\{T\geq n\}} \\
&= X_{n\wedge T}.
\end{aligned}$$

Le processus $(X_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une martingale. Comme conséquence, on a $\mathbb{E}[X_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[X_{0\wedge T}] = \mathbb{E}[X_0]$.

Finalement, on a $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$.

b) $\Longrightarrow$ a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathscr{F}_n$. La variable aléatoire $T_{n,A} = (n+1)\mathbf{1}_A + n\mathbf{1}_{A^c}$ est à valeurs dans $\{n, n+1\}$ et

$$\{T_{n,A} = k\} = \begin{cases} \emptyset & \text{if } k \notin \{n, n+1\} \\ A^c & \text{if } k = n \\ A & \text{if } k = n+1 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\{T_{n,A} = k\} \in \mathscr{F}_k$ et donc $T_{n,A}$ est un temps d'arrêt borné (par $n+1$).

On en déduit d'une part que $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0]$ (prendre $A = \emptyset$) et d'autre part que $\mathbb{E}\left[M_{T_{n,A}}\right] = \mathbb{E}[M_0]$, c'est à dire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1}\mathbf{1}_A] &= \mathbb{E}\left[M_{n+1}\mathbf{1}_{\{T=n+1\}}\right] \\
&= \mathbb{E}[M_0] - \mathbb{E}\left[M_n \mathbf{1}_{\{T=n\}}\right] \\
&= \mathbb{E}[M_0] - \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_{A^c}] \\
&= \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_A] + \mathbb{E}[M_0] - \mathbb{E}[M_n] \\
&= \mathbb{E}[M_n \mathbf{1}_A].
\end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour tout $A \in \mathscr{F}_n$ et comme M_n est $\mathscr{F}_n$−mesurable, on en conclut que $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = M_n$. Finalement, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$−martingale.

Exercice 6. — a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La v.a. X_n est $\mathscr{F}_n$−mesurable et intégrable.

Soit $\varepsilon > 0$, comme par hypothèse $X_n - \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] \geq 0$ p.s. et par l'inégalité de Markov, on a

$$\mathbb{P}[X_n - \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] > \varepsilon] \leq \varepsilon^{-1}\mathbb{E}\left[(X_n - \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n])\mathbf{1}_{\{X_n - \mathbb{E}[X_{n+1}\mid\mathscr{F}_n] > \varepsilon\}}\right] \leq \varepsilon^{-1}\mathbb{E}[X_n - \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n]] = 0.$$

On en déduit que $X_n - \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = 0$ p.s. et donc que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

Remarque 1. On vient de montrer qu'une v.a. positive d'intégrale nulle est nulle p.s.

b) Comme $\{0\}$ est un borélien, l'exercice 1b) assure que la v.a. T est un t.a.. Soit à présent $k\in\mathbb{N}$. On a

$$
\begin{aligned}
0 \le \mathbb{E}[X_{T+k}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} X_{n+k}\mathbf{1}_{\{T=n\}}\right]\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[X_{n+k}\mathbf{1}_{\{T=n\}}\right] \text{ car les v.a. sont positives}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_{n+k}\mid\mathscr{F}_n]\,\mathbf{1}_{\{T=n\}}\right] \text{ car } \{T=n\} \text{ est } \mathscr{F}_n\text{−mesurable}\\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[X_n\mathbf{1}_{\{T=n\}}\right] \text{ car } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une sur- martingale}\\
&= \mathbb{E}[X_T] = 0 \text{ car } X_T = 0 \text{ p.s..}
\end{aligned}
$$

On en déduit $X_{T+k}=0$ p.s. (car une v.a. positive d'intégrale nulle est nulle p.s.).

c) Remarquons que pour tout $i\in\mathbb{N}$, par l'inégalité de Cauchy Schwarz,

$$
\mathbb{E}[|\Delta X_i\Delta Y_i|] \le \left(\mathbb{E}\left[\Delta X_i^2\right]\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}\left[\Delta Y_i^2\right]\right)^{1/2} < \infty
$$

et donc $\mathbb{E}[|X_nY_n|] \le \left(\mathbb{E}\left[X_0^2\right]\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}\left[Y_0^2\right]\right)^{1/2} + \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[|\Delta X_i\Delta Y_i|] < \infty$ c'est à dire pour tout $n\in\mathbb{N}$, la v.a. X_nY_n est intégrable. On a aussi, pour $i\in\mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\Delta X_i\Delta Y_i] = \mathbb{E}[(X_i-X_{i-1})(Y_i-Y_{i-1})] &= \mathbb{E}[X_iY_i - X_iY_{i-1} - X_{i-1}Y_i + X_{i-1}Y_{i-1}]\\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_iY_i - X_iY_{i-1} - X_{i-1}Y_i + X_{i-1}Y_{i-1}\mid\mathscr{F}_{i-1}]]\\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_iY_i\mid\mathscr{F}_{i-1}] - Y_{i-1}\mathbb{E}[X_i\mid\mathscr{F}_{i-1}] - X_{i-1}\mathbb{E}[Y_i\mid\mathscr{F}_{i-1}] + Y_{i-1}X_{i-1}]\\
&= \mathbb{E}[X_iY_i] - \mathbb{E}[Y_{i-1}X_{i-1}]
\end{aligned}
$$

donc

$$
\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[\Delta X_i\Delta Y_i] = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_iY_i] - \mathbb{E}[Y_{i-1}X_{i-1}] = \mathbb{E}[X_nY_n] - \mathbb{E}[X_0Y_0].
$$

d) Soit $n\in\mathbb{N}$, M_n est clairement $\mathscr{F}_n$−mesurable (elle est définie à partir des $(Y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$). On a vu à la question précédente que M_n est intégrable. De plus,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1}\mid\mathscr{F}_n] &= M_n + \mathbb{E}[X_{n+1}Y_{n+1} - X_nY_n - \Delta X_{n+1}\Delta Y_{n+1}\mid\mathscr{F}_n]\\
&= M_n + \mathbb{E}[X_{n+1}Y_{n+1}\mid\mathscr{F}_n] - X_nY_n - \mathbb{E}[X_{n+1}Y_{n+1}\mid\mathscr{F}_n] + X_nY_n\\
&= M_n.
\end{aligned}
$$

Le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$−martingale.

e) Notons $H_k = \mathbf{1}_{\{k\le T\}}$. Comme $\{T\ge k\} = \{T\le k-1\}^c \in \mathscr{F}_{k-1}$, le processus $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est prévisible et positif. De plus

$$
\begin{aligned}
X_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k\Delta X_k &= X_0 + \sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\{k\le T\}}(X_k - X_{k-1})\\
&= X_0 + \sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\{k\le T\}}X_k - \sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\{k\le T\}}X_{k-1}\\
&= X_0 + \sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\{k\le T\}}X_k - \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_{\{k+1\le T\}}X_k\\
&= X_0 - \mathbf{1}_{\{1\le T\}}X_0 + \mathbf{1}_{\{n\le T\}}X_n + \sum_{k=1}^{n-1}(\mathbf{1}_{\{k\le T\}} - \mathbf{1}_{\{k+1\le T\}})X_k\\
&= \mathbf{1}_{\{T=0\}}X_0 + \mathbf{1}_{\{n\le T\}}X_n + \sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{1}_{\{k=T\}}X_k\\
&= X_{n\wedge T}.
\end{aligned}
$$

f) Remarquons que $\mathscr{G}_n \subset \mathscr{F}_n$ car $\mathscr{G}_n$ est la plus petite tribu qui rend mesurable les $(X_i)_{0\leq i\leq n}$. Donc

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{G}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] \mid \mathscr{G}_n] = \mathbb{E}[X_n \mid \mathscr{G}_n] = X_n.$$

Soit T un temps d'arrêt pour la tribu $(\mathscr{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $\{T = n\} \in \mathscr{G}_n \subset \mathscr{F}_n$ donc T est aussi un temps d'arrêt pour la tribu $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7. — a) La v.a. $X = G\wedge(n+1)$ est à valeurs dans $[\![0, n+1]\!]$. Donc $\mathscr{F}_n = \sigma(X) = \sigma(X^{-1}(0), \dots, X^{-1}(n+1)) = \sigma(\{\{G = 0\}, \{G = 1\}, \dots, \{G = n\}, \{G \geq n+1\}\})$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La v.a. M_n est $\mathscr{F}_n$−mesurable. De plus comme

$$M_{n+1} = \mathbf{1}_{\{G\leq n+1\}} - (1-p)(G \wedge (n+1)) = M_n + \mathbf{1}_{\{G=n+1\}} - (1-p)\mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}},$$

il vient

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = M_n + \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{G=n+1\}} - (1-p)\mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right]$$

avec, remember l'exercice 3 du TD 1,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{G=n+1\}} - (1-p)\mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right] &= \frac{1}{\mathbb{P}[G \geq n+1]} \times \mathbb{E}\left[(\mathbf{1}_{\{G=n+1\}} - (1-p)\mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}})\mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}}\right]\mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}[G \geq n+1]} \times (\mathbb{P}[G = n+1] - (1-p)\mathbb{P}[G \geq n+1])\mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}} \\
&= \frac{p^{n+1}(1-p) - (1-p)^2 p^{n+1}/(1-p)}{\mathbb{P}[G \geq n+1]}\mathbf{1}_{\{G\geq n+1\}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$−martingale.
Comme $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale de carré intégrable et que

$$\begin{aligned}
A_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[[\Delta M_i]^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{i-1}\right] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\mathbf{1}_{\{G\leq i\}} - (1-p)(G\wedge i) - \mathbf{1}_{\{G\leq i-1\}} + (1-p)(G \wedge (i-1)))^2 \,\middle|\, \mathscr{F}_{i-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{G=i\}} + (1-p)^2\mathbf{1}_{\{G\geq i\}} - 2(1-p)\mathbf{1}_{\{G=i\}}\mathbf{1}_{\{G\geq i\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{i-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mathbb{P}[G \geq i]} \times (\mathbb{P}[G = i] + (1-p)^2\mathbb{P}[G \geq i] - 2(1-p)\mathbb{P}[G = i])\mathbf{1}_{\{G\geq i\}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p^i} \times (p^i(1-p) + (1-p)^2 p^i - 2(1-p)^2 p^i)\mathbf{1}_{\{G\geq i\}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} p(1-p)\mathbf{1}_{\{G\geq i\}} \\
&= p(1-p)(G \wedge n),
\end{aligned}$$

d'après l'exercice 4, le processus $(M_n^2 - A_n)_{n\in\mathbb{N}} = (M_n^2 - p(1-p)(G\wedge n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$−martingale.

Exercice 8. — a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $Y_{n\wedge T} = \sum_{k=1}^{n-1} Y_k \mathbf{1}_{\{T=k\}} + Y_n \mathbf{1}_{\{T\geq n\}}$ est $\mathscr{F}_n$−mesurable (car $\{T \geq n\} = \{T \leq n-1\}^c \in \mathscr{F}_{n-1} \subset \mathscr{F}_n$ et $Y_n \in \mathscr{F}_n$). Pour tout $k \leq n$, on a $|Y_k| \leq 2^n$, donc $\mathbb{E}[|Y_{n\wedge T}|] \leq 2^n$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y_{(n+1)\wedge T} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[Y_{n\wedge T} + (Y_{n+1} - Y_n)\mathbf{1}_{\{T\geq n+1\}} \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right] \\
&= Y_{n\wedge T} + \mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n]\mathbf{1}_{\{T\geq n+1\}} - Y_n\mathbf{1}_{\{T\geq n+1\}} \text{ car } \mathbf{1}_{\{T\geq n+1\}} \text{ et } Y_n \text{ sont } \mathscr{F}_n\text{−mesurables} \\
&= Y_{n\wedge T} \text{ car } (Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une martingale.}
\end{aligned}$$

Donc $(Y_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale. Ainsi, $\mathbb{E}[Y_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[Y_0] = 0$.

b) On a
$$\mathbb{P}[T=n]=\mathbb{P}[X_1=X_2=\cdots=X_{n-1}=-1,X_n=1]=\frac{1}{2^n}.$$
Donc $\mathbb{P}[T<\infty]=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[T=n]=1$. De plus, $Y_T=1$ p.s.. On a alors $\mathbb{E}[Y_T]=1\neq\mathbb{E}[Y_0]$. La convergence n'a donc pas lieu dans L^1. Les hypothèses du théorème d'arrêt ne sont pas vérifiées.

c) On a
$$\mathbb{E}[D]=\sum_{k=1}^{\infty}|G_{k-1}|\mathbb{P}[T=k]=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{1}{2^k}=\infty.$$
Il faut une fortune infinie pour pouvoir gagner !

Exercice 9 : ***Inégalité de Lundberg.*** **—** a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, M_n est $\mathscr{F}_n$ mesurable car est fonction continue des $(X_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et $\mathbb{E}[|M_n|]=\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n e^{RX_k}\right]=\prod_{k=1}^n\mathbb{E}\left[e^{RX_k}\right]=\mathbb{E}\left[e^{RX_k}\right]^n=1<\infty$. De plus
$$\mathbb{E}[M_{n+1}\mid\mathscr{F}_n]=\mathbb{E}\left[M_n\times e^{RX_{n+1}}\mid\mathscr{F}_n\right]=M_n\times\mathbb{E}\left[e^{RX_{n+1}}\right]=M_n.$$
donc $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

b) Le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adaptée à la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'ensemble $[l,\infty)$ est un borélien. D'après l'exercice 1, question b), T est un temps d'arrêt.

c) On a, par l'inégalité de Markov,
$$\mathbb{P}[S_n\geq l]\leq\mathbb{P}[S_{n\wedge T}\geq l]=\mathbb{P}\left[M_{n\wedge T}\geq e^{Rl}\right]\leq e^{-Rl}\mathbb{E}\left[M_{n\wedge T}\mathbf{1}_{\{M_{n\wedge T}\geq e^{Rl}\}}\right]\leq e^{-Rl}\mathbb{E}[M_{n\wedge T}].$$
Comme $(M_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, on a $\mathbb{E}[M_{n\wedge T}]=\mathbb{E}[M_1]=1$. L'inégalité s'en déduit.

Exercice 10 : ***La ruine du joueur.*** **—** a) La v.a. T est à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. De plus l'ensemble $\{0,N\}$ est un borélien. Donc T est une temps d'arrêt.

b) Si $n<T$ alors $1\leq S_n\leq N-1$. Si en plus $X_{n+1}=\cdots=X_{n+N-1}=1$, alors $S_{n+N-1}=S_n+\sum_{k=1}^{N-1}X_{n+k}=S_n+N-1\geq N$, donc $T\leq n+N-1$.

c) On en déduit que
$$\begin{aligned}\mathbb{P}[n+N-1<T]&=\mathbb{P}[n+N-1<T\mid n<T]\mathbb{P}[n<T]\\&=(1-\mathbb{P}[n+N-1\geq T\mid n<T])\mathbb{P}[n<T]\\&\leq(1-p^{N-1})\mathbb{P}[n<T]\end{aligned}$$
car $\mathbb{P}[n+N-1\geq T\mid n<T]\geq\mathbb{P}[X_{n+1}=\cdots=X_{n+N-1}=1\mid n<T]=p^{N-1}$.
On montre alors facilement par récurrence que pour tout $k\geq 0$,
$$\mathbb{P}[T>k(N-1)]\leq(1-p^{N-1})^k\times\mathbb{P}[T>0].\tag{1}$$
La suite $(\mathbb{P}[T>n])_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite décroissante et minorée, elle converge. On déduit de (1) que $\mathbb{P}[T>n]\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ et donc $\mathbb{P}[T<\infty]=1$.

d) Soit $n\in\mathbb{N}$, la v.a. S_n est $\mathscr{F}_n$−mesurable et comme $|S_n|\leq x+n$, $S_n\in L^1$. De plus
$$\mathbb{E}[S_{n+1}\mid\mathscr{F}_n]=S_n+\mathbb{E}[X_{n+1}\mid\mathscr{F}_n]=S_n+\mathbb{E}[X_{n+1}]=S_n,$$
donc le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (on a utilisé l'indépendance des $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $\mathbb{E}[X_{n+1}]=0$).

e) D'après (1), le temps d'arrêt T est intégrable. En effet, $\mathbb{E}[T]=\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}[T\geq n]$ avec $\mathbb{P}[T>n]\leq\mathbb{P}[T>k_n(N-1)]\leq(1-p^{N-1})^{k_n}$ où $k_n=E\left(\frac{n}{N-1}\right)$. De plus, $|S_{n+1}-S_n|\leq 1$, donc, d'après le théorème d'arrêt, $\mathbb{E}[S_T]=\mathbb{E}[S_0]=x$. La v.a. S_T est à valeur dans $\{0,N\}$ avec $\mathbb{E}[S_T]=N\mathbb{P}[S_T=N]$. Finalement,
$$\mathbb{P}[S_T=0]=\frac{N-x}{N}.$$

f) Soit $n \in \mathbb{N}$. La v.a. M_n est $\mathscr{F}_n$−mesurable. Comme $|S_n| \leq x+n$, on a $\mathbb{E}[M_n] \leq ((p/q) \vee (q/p))^{x+n} < \infty$. Finalement,

$$\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}} \middle| \mathscr{F}_n\right] = M_n \times \left(\frac{q}{p} \times p + \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} \times q\right) = M_n,$$

où on a utilisé la $\mathscr{F}_n$−mesurabilité de M_n et l'indépendance de Y_{n+1} avec $\mathscr{F}_n$. Donc le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$−martingale.

g) Le processus $(M_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale donc $\mathbb{E}[M_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[M_0] = (q/p)^x$. De plus, elle est bornée et comme le temps d'arrêt T est fini p.s., on a $M_{n\wedge T} \to M_T$ par le théorème de convergence dominée. La v.a. S_T est à valeur dans $\{0,N\}$ donc $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{P}[S_T = 0] + \left(\frac{q}{p}\right)^N \mathbb{P}[S_T = N]$. Finalement,

$$\mathbb{P}[S_T = 0] = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

Exercice 11. — a) Le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté et pour $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq Y_n \leq 26^2(n-1) + 26 < \infty$, donc $M_n \in L^1$. Finalement, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] &= Y_n + \mathbb{E}\left[26^2\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=B,X_n=A\}} + 26(\mathbf{1}_{\{X_{n+1}=A\}} - \mathbf{1}_{\{X_n=A\}}) \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right] \\
&= Y_n + 26^2\mathbf{1}_{\{X_n=A\}}\mathbb{P}[X_{n+1} = B] + 26\mathbb{P}[X_{n+1} = A] - 26\mathbf{1}_{\{X_n=A\}} \\
&\qquad \text{car } X_n \text{ est } \mathscr{F}_n\text{−mesurable et } X_{n+1} \text{ est indépendante de } \mathscr{F}_n \\
&= Y_n + 1.
\end{aligned}$$

On en déduit que $(Y_n - n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$−martingale.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}[T_{AB} > n+1] = \mathbb{P}[T_{AB} > n, T_{AB} \neq n+1] = \mathbb{P}[T_{AB} > n] - \mathbb{P}[T_{AB} = n+1]$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[T_{AB} = n+1] &= \mathbb{P}[X_{n+1} = B, X_n = A, \forall k \leq n\colon X_k \neq B \text{ ou } X_{k-1} \neq A] \\
&= \mathbb{P}[X_{n+1} = B, X_n = A, T_{AB} > n-1] \\
&= \frac{1}{26^2}\mathbb{P}[T_{AB} > n-1].
\end{aligned}$$

Ainsi, en notant $\gamma_n = \mathbb{P}[T_{AB} > n]$, on a $\gamma_{n+1} - \gamma_n + \gamma_{n-1}/26^2 = 0$: c'est une relation de récurrence linéaire du deuxième ordre. Elle se résout facilement et on trouve

$$\gamma_n = \alpha\left(\frac{13+\sqrt{168}}{26}\right)^n + \beta\left(\frac{13-\sqrt{168}}{26}\right)^n, \text{ avec } \alpha + \beta = 1.$$

Ainsi, $\mathbb{P}[T_{AB} > n] \leq c^n$ avec $c = \frac{13+\sqrt{168}}{26} = \frac{13+\sqrt{13^2-1}}{26} < 1$.
On en déduit que $\mathbb{E}[T_{AB}] = \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}[T_{AB} \geq k] \leq \sum_{k\geq 0} c^k < \infty$ puis $\mathbb{P}[T_{AB} < \infty] = 1$, comme à l'exercice 6.

c) Le t.a. $T \in L^1$ et $|M_{n+1} - M_n| \leq 1+26+26^2$, donc d'après le théorème d'arrêt, on a $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_2] = 0$. Comme T_{AB} est intégrable, $Y_{T_{AB}}$ aussi et on a alors $\mathbb{E}[T_{AB}] = \mathbb{E}\left[Y_{T_{AB}}\right]$. Enfin, $\mathbb{E}\left[Y_{T_{AB}}\right] = 26^2$ (car $Y_{T_{AB}} = 26^2$ p.s.).

d) En notant $\tilde{Y}_n = \sum_{k=2}^n 26^2\mathbf{1}_{\{X_k=B,X_{k-1}=B\}} + 26\mathbf{1}_{\{X_n=B\}}$, on montre que $\tilde{M}_n = \tilde{Y}_n - n$ est une martingale. Comme à la question b), on peut montrer que $\mathbb{E}[T_{BB}] < \infty$. Puis, comme à la question c), en utilisant le théorème d'arrêt, on montre $\mathbb{E}[T_{BB}] = 26^2 + 26$.

e) Pour alléger les notations, on note simplement $T = T_{ABRACADABRA}$. On définit la variable aléatoire

$$\bar{Y}_n = \sum_{k=11}^{n} 26^{11} \times \mathbf{1}_{\{X_{k-10}=A, X_{k-9}=B\ldots, X_{k-1}=R, X_k=A\}} + 26^{10} \times \mathbf{1}_{\{X_{n-9}=A, X_{n-8}=B,\ldots, X_{n-1}=B, X_n=R\}}$$
$$+ \cdots + 26^2 \times \mathbf{1}_{\{X_{n-1}=A, X_n=B\}} + 26 \times \mathbf{1}_{\{X_n=A\}}.$$

Il est facile de montrer que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\bar{Y}_n - n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}-$martingale. De plus, le t.a. T est p.s. fini. En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[T \le 11n] &\ge \mathbb{P}[\exists k \le 11n,\ X_{k-10} = A, \ldots, X_{k-1} = R, X_k = A] \\
&\ge \mathbb{P}[\exists k \le n,\ X_{11k-10} = A, \ldots, X_{11k-1} = R, X_{11k} = A] \\
&\ge 1 - \left(1 - \frac{1}{26^{11}}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.
\end{aligned}$$

Ensuite, comme le processus $(M_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}-$martingale, on a $\mathbb{E}[M_{n\wedge T}] = 0$ et donc $\mathbb{E}[n \wedge T] = \mathbb{E}[Y_{n\wedge T}]$. Comme $n\wedge T \nearrow T$, le théorème de Bepo-Levi assure $\mathbb{E}[n \wedge T] \nearrow \mathbb{E}[T] \in [0,\infty]$. D'autre part, $Y_{n\wedge T} \to Y_T$ p.s. et $0 \le Y_{n\wedge T} \le 26^{12}$ (à la louche). Le théorème de convergence dominée assure que $\mathbb{E}[Y_{n\wedge T}] \to \mathbb{E}[Y_T] = 26^{11} + 26^4 + 26$. Finalement, $\mathbb{E}[T_{ABRACADABRA}] = 26^{11} + 26^4 + 26$.