TD3. Comportement asymptotique des martingales.

Exercice 1 a) Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[(Y_{n+1} - q_\alpha)^2 \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(\Delta Y_{n+1} + Y_n - q_\alpha)^2 \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[(\Delta Y_{n+1})^2 \mid \mathcal{F}_n] + 2(Y_n - q_\alpha)\,\mathbb{E}[\Delta Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] + Z_n\end{aligned}$$

Or $\Delta Y_{n+1} = -\gamma_n (\mathbb{1}_{X_{n+1} \leq Y_n} - \alpha)$, alors puisque Y_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et $X_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n$:

$$\mathbb{E}[\Delta Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = -\gamma_n (\mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_{n+1} \leq Y_n} \mid \mathcal{F}_n] - \alpha) = -\gamma_n (F(Y_n) - \alpha)$$

Remarquons au passage que puisque $\alpha = F(q_\alpha)$ et F est croissante (en tant que fonction de répartition), on a $(Y_n - q_\alpha)(F(Y_n) - \alpha) \geq 0$.

Posons $U_0 := 0$ et pour $n \geq 1$, $U_n := \sum_{k=1}^{n} (\Delta Y_k)^2$. Observons que U est un processus croissant et adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$. De plus, c'est un processus borné puisque pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k^2 (\mathbb{1}_{X_{k+1} \leq Y_k} - \alpha)^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k^2 \leq \sum_{k \geq 0} \gamma_k^2 =: \Gamma < \infty$$

Posons enfin $W := Z - U$. Pour tout $n \geq 0$, on aura alors :

$$\begin{aligned}W_n - \mathbb{E}[W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\Delta U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[\Delta Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[(\Delta Y_{n+1})^2 \mid \mathcal{F}_n] - \Big(\mathbb{E}[(\Delta Y_{n+1})^2 \mid \mathcal{F}_n] - 2\gamma_n (Y_n - q_\alpha)(F(Y_n) - \alpha)\Big) \\ &= 2\gamma_n (Y_n - q_\alpha)(F(Y_n) - \alpha) \geq \gamma_n (Y_n - q_\alpha)(F(Y_n) - \alpha) \geq 0\end{aligned}$$

Le processus W ainsi défini est donc une sur-martingale.

b) Puisque Z_n est positif et que $U_n \leq \Gamma$ pour tout n, on a $W_n \geq -\Gamma$ ou encore $W_n + \Gamma \geq 0$ quel que soit n. La sur-martingale $(W_n + \Gamma)_n$ est donc positive, ce qui assure qu'il existe une variable aléatoire W_∞ vérifiant $W_n + \Gamma \to W_\infty + \Gamma$ p.s., i.e. $W_n \to W_\infty$. De plus :

$$-\Gamma \leq \mathbb{E}[W_\infty] = \mathbb{E}[\liminf W_n] \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \mathbb{E}[W_n] \leq \mathbb{E}[W_0] = (Y_0 - q_\alpha)^2$$

c) La dernière inégalité obtenue à la question a) assure que pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}&0 \leq \sum_{k=0}^{n} \gamma_k (Y_k - q_\alpha)(F(Y_k) - \alpha) \leq -\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[\Delta W_{k+1} \mid \mathcal{F}_k] \\ \text{d'où}\quad &0 \leq \mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{n} \gamma_k (Y_k - q_\alpha)(F(Y_k) - \alpha)\Big] \leq -\mathbb{E}[W_{n+1} - W_0] \leq \Gamma + (Y_0 - q_\alpha)^2 \\ \text{et donc}\quad &0 \leq \mathbb{E}\Big[\sum_{n \geq 0} \gamma_n (Y_n - q_\alpha)(F(Y_n) - \alpha)\Big] \leq \Gamma + (Y_0 - q_\alpha)^2 < \infty\end{aligned}$$

De ce fait, la série $\sum_{n \geq 0} \gamma_n (Y_n - q_\alpha)(F(Y_n) - \alpha)$ converge p.s. et dans L^1.

Rappelons que U est un processus croissant et borné, ainsi en notant $U_\infty := \sup_n U_n$, on a $U_\infty \leq \Gamma$ et $U_n \uparrow U_\infty$ p.s. (et dans L^1 par convergence monotone). De ce fait, $Z_n = W_n + U_n \to W_\infty + U_\infty =: Z_\infty$ p.s..

Notons, pour tout $k \geq 1$, $\mathrm{A}_k := \{\mathrm{Z}_\infty \geq 1/k^2\}$. Sur A_k, on aura alors $\liminf |\mathrm{Y}_n - q_\alpha| \geq 1/k$, ce qui assure, vu que q_α est l'unique solution de $\mathrm{F}(q) = \alpha$, qu'il existe $\varepsilon_k > 0$ tel que $\liminf |\mathrm{F}(\mathrm{Y}_n) - \alpha| \geq \varepsilon_k$. Ainsi sur A_k, $\liminf (\mathrm{Y}_n - q_\alpha)(\mathrm{F}(\mathrm{Y}_n) - \alpha) \geq \varepsilon_k/k > 0$, et la série $\sum_{n\geq 0} \gamma_n (\mathrm{Y}_n - q_\alpha)(\mathrm{F}(\mathrm{Y}_n) - \alpha)$ aura alors le même comportement que $\sum_{n\geq 0} \gamma_n$ qui diverge. De ce fait, $\mathbb{P}[\mathrm{A}_k] = 0$ quel que soit $k \geq 1$. Observons enfin que :

$$\mathbb{P}[\mathrm{Z}_\infty > 0] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{k\geq 1} \mathrm{A}_k\right] \leq \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}[\mathrm{A}_k] = 0$$

D'où $\mathrm{Z}_\infty = 0$ p.s., et donc $\mathrm{Y}_n \to q_\alpha$ p.s..

Exercice 2 a) Pour tout $n \geq 1$:

- $$\begin{aligned} \mathrm{M}_n &= \textstyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} \mathrm{X}_i \mathrm{X}_j - \sum_{i=1}^n a_{i,i} \\ &= \textstyle\sum_{1\leq i<j\leq n} (a_{i,j}\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j + a_{j,i}\mathrm{X}_j\mathrm{X}_i) + \sum_{i=1}^n (a_{i,i}\mathrm{X}_i^2 - a_{i,i}) \\ &= 2\textstyle\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j + \sum_{i=1}^n a_{i,i}(\mathrm{X}_i^2 - 1) = 2\mathrm{U}_n + \mathrm{V}_n \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta\mathrm{U}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\textstyle\sum_{j=1}^n a_{n+1,j}\mathrm{X}_{n+1}\mathrm{X}_j \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] = \textstyle\sum_{j=1}^n a_{n+1,j}\,\mathrm{X}_j\,\mathbb{E}[\mathrm{X}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n a_{n+1,j}\,\mathrm{X}_j\,\mathbb{E}[\mathrm{X}_{n+1}] = 0 \end{aligned}$$
- $$\mathbb{E}[\Delta\mathrm{V}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[a_{n+1,n+1}(\mathrm{X}_{n+1}^2 - 1) \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] = a_{n+1,n+1}(\mathbb{E}[\mathrm{X}_{n+1}^2] - 1) = 0$$
- $$\mathbb{E}[\Delta\mathrm{M}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = 2\mathbb{E}[\Delta\mathrm{U}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\Delta\mathrm{V}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = 0$$

De ce fait, les processus adaptés et intégrables U, V et M sont bien des martingales.

b) Si $i \neq j$, puisque $\mathrm{X}_i \perp\!\!\!\perp \mathrm{X}_j$, on a $\mathbb{E}[(\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j)^2] = \mathbb{E}[\mathrm{X}_i^2]\,\mathbb{E}[\mathrm{X}_j^2] = 1$. Ainsi, en tant que combinaison linéaire de v.a. elles-même dans L^2, $\mathrm{U}_n \in \mathrm{L}^2$ pour tout $n \geq 0$. Puisque le processus U est une martingale dans L^2, la famille $(\Delta\mathrm{U}_n)_n$ de ses incréments est orthogonale pour le produit scalaire de L^2, d'où, puisque $\mathrm{U}_0 = 0$, $\mathbb{E}[\mathrm{U}_n^2] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\Delta\mathrm{U}_k)^2]$. Or on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\Delta\mathrm{U}_k)^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\textstyle\sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i}\mathrm{X}_k\mathrm{X}_i\right)^2\right] = \textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1} a_{k,i}a_{k,j}\mathbb{E}[\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j] \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i}^2 \qquad (\text{car } \mathbb{E}[\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j] = \mathbb{1}_{i=j}) \\ \text{d'où} \quad \sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[\mathrm{U}_n^2] &= \sup_{n\geq 0} \textstyle\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{k-1} a_{k,i}^2 \leq \sum_{i,j\geq 1} a_{i,j}^2 = \mathrm{C} < \infty \end{aligned}$$

De même, puisque $\mathrm{X}_n \in \mathrm{L}^4$, V_n est une combinaison linéaire de v.a. de L^2 d'où $\mathrm{V}_n \in \mathrm{L}^2$ et donc, puisque V est une martingale et $\mathrm{V}_0 = 0$, $\mathbb{E}[\mathrm{V}_n^2] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(\Delta\mathrm{V}_k)^2]$. Enfin, observons que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\Delta\mathrm{V}_k)^2] &= \mathbb{E}\left[a_{k,k}^2(\mathrm{X}_k^2 - 1)^2\right] = a_{k,k}^2\,\mathrm{Var}(\mathrm{X}_k^2) = a_{k,k}^2\,\mathrm{Var}(\mathrm{X}_1^2) \\ \text{d'où} \quad \sup_{n\geq 0}\mathbb{E}[\mathrm{V}_n^2] &= \sup_{n\geq 0}\mathrm{Var}(\mathrm{X}_1^2)\textstyle\sum_{k=1}^n a_{k,k}^2 \leq \mathrm{Var}(\mathrm{X}_1^2)\sum_{i,j\geq 1} a_{i,j}^2 = \mathrm{Var}(\mathrm{X}_1^2)\,\mathrm{C} < \infty \end{aligned}$$

c) Les deux martingales U et V étant bornées dans L^2, il existe deux v.a. U_∞ et V_∞ dans L^2 telles que $\mathrm{U}_n \to \mathrm{U}_\infty$ et $\mathrm{V}_n \to \mathrm{V}_\infty$ p.s. et dans L^2. De ce fait, $\mathrm{M}_n \to 2\mathrm{U}_\infty + \mathrm{V}_\infty =: \mathrm{M}_\infty$ p.s. et dans L^2.

d) La convergence L^2 implique la convergence des espérances et des espérances des carrés. On aura donc $0 = \mathbb{E}[\mathrm{M}_0] = \mathbb{E}[\mathrm{M}_n] \to \mathbb{E}[\mathrm{M}_\infty]$, d'où $\mathbb{E}[\mathrm{M}_\infty] = 0$, ainsi que $\mathrm{Var}(\mathrm{M}_n) = \mathbb{E}[\mathrm{M}_n^2] \to \mathbb{E}[\mathrm{M}_\infty^2] = \mathrm{Var}(\mathrm{M}_\infty)$.

Exercice 3 a) Observons que pour tout $n \geq 0$:

$$\mathbb{P}\left[S_{n+1} = S_n + 1 \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left[S_{n+1} = S_n \mid \mathcal{F}_n\right] = 1 - X_n$$

De ce fait :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \frac{1}{n+3}\mathbb{E}\left[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \frac{1}{n+3}\left[(S_n+1)X_n + S_n(1-X_n)\right] \\
&= \frac{X_n + S_n}{n+3} = \frac{X_n + (n+2)X_n}{n+3} = X_n
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que X est une martingale.

b) Quel que soit $n \geq 0$, on a $0 \leq X_n \leq 1$, donc le processus X est borné p.s. (i.e. dans L^∞). De ce fait, il existe $X_\infty \in L^\infty$ vérifiant $X_n \to X_\infty$ p.s. et dans L^1.
Autrement, on peut remarquer que X est une (sur-) martingale positive ce qui assure l'existence d'une v.a. X_∞ telle que $X_n \to X_\infty$ p.s.. Puisqu'en plus $\sup_n |X_n| \leq 1 \in L^1$, le théorème de convergence dominée nous donne $X_n \to X_\infty$ dans L^1.

c) Soit $n \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_{n+1}^{(k)} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k-1} \frac{S_{n+1}+i}{n+3+i} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right] = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{S_n+1+i}{n+3+i} \times \frac{S_n}{n+2} + \prod_{i=0}^{k-1} \frac{S_n+i}{n+3+i} \times \frac{n+2-S_n}{n+2} \\
&= \prod_{i=0}^{k-1} \frac{S_n+i}{n+2+i} \times \frac{S_n+k}{n+k+2} + \prod_{i=0}^{k-1} \frac{S_n+i}{n+2+i} \times \frac{n+2-S_n}{n+k+2} \\
&= Z_n^{(k)} \times \frac{S_n+k+n+2-S_n}{n+k+2} = Z_n^{(k)}
\end{aligned}$$

Le processus $Z^{(k)}$ est donc une martingale, ce qui assure que pour tout $n \geq 0$:

$$\mathbb{E}\left[Z_n^{(k)}\right] = \mathbb{E}\left[Z_0^{(k)}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k-1} \frac{S_0+i}{0+2+i}\right] = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1+i}{2+i} = \frac{1}{k+1}$$

d) Observons que pour tout $i \geq 0$, comme $S_n \to \infty$ p.s.:

$$\frac{S_n+i}{n+2+i} = \underbrace{\frac{S_n+i}{S_n}}_{\downarrow\, n\to\infty \atop 1} \; \underbrace{\frac{n+2}{n+2+i}}_{\downarrow\, n\to\infty \atop 1} \; \underbrace{\frac{S_n}{n+2}}_{\| \atop X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} X_\infty$$

De ce fait, $Z_n^{(k)} \to X_\infty^k$ p.s., or comme on a $0 \leq Z_n^{(k)} \leq 1$, le théorème de convergence domninée assure que cette convergence a aussi lieu dans L^1 (on peut aussi dire que la martingale $Z^{(k)}$ est bornée p.s. et va donc converger p.s. et dans L^1). En particulier, on a la convergence des espérances, i.e. $\mathbb{E}\left[X_\infty^k\right] = \lim \mathbb{E}\left[Z_n^{(k)}\right] = 1/(k+1)$.

e) La variable X_∞ étant bornée dans L^∞, on a $X_\infty \in L^p$ pour tout $p \geq 1$. Sa fonction caractéristique est alors développable en série entière autour de 0 et vérifie pour $|t| \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_\infty}(t) := \mathbb{E}\left[e^{itX_\infty}\right] &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{E}\left[X_\infty^n\right]}{n!}(it)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{(n+1)!} = \frac{e^{it}-1}{it} \\
&= \int_0^1 e^{itu}\,du = \mathbb{E}\left[e^{itU}\right] = \varphi_U(t) \quad \text{avec } U \rightsquigarrow \mathcal{U}([0,1])
\end{aligned}$$

La loi d'une v.a. réelle étant caractérisée par sa fonction caractéristique, on en déduit que $X_\infty \rightsquigarrow \mathcal{U}([0,1])$.

Exercice 4 a) On a $X_{n+1} = X_n Y_{n+1}$ et puisque $Y_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n$, on a $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n \mathbb{E}[Y_{n+1}] = X_n$ quel que soit $n \geq 0$, d'où X est une martingale qui est de plus positive, ce qui assure l'existence d'une v.a. X_∞ telle que $X_n \to X_\infty$ p.s..

b) Pour tout $n \geq 1$, p.s. on a $\log \delta \leq \log Y_n \leq Y_n$ d'où $\log Y_n \in L^1$. La fonction log étant strictement concave, l'inégalité de Jensen nous donne $\mathbb{E}[\log Y_n] \leq \log \mathbb{E}[Y_n] = 0$ avec égalité s.s.i. $Y_n = 1$ p.s.. Hormis ce cas dégénéré, on a donc bien $\mathbb{E}[\log Y_n] < 0$.

La fonction log est continue donc p.s. on a $\log X_n \to \log X_\infty$ (qui est éventuellement égale à $-\infty$). Observons de plus que $(\log X_n)/n = 1/n \sum_{k=1}^n \log Y_k$ et comme la suite de v.a. intégrables $(\log Y_n)_n$ est i.i.d., on est en mesure d'appliquer la loi forte des grands nombres et on obtient $(\log X_n)/n \to \mathbb{E}[\log Y_1] < 0$ p.s. et dans L^1. De ce fait, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{E}[\log Y_1] < -\varepsilon$ ainsi qu'une v.a. N vérifiant p.s. $N < \infty$ et $\sup_{n \geq N} (\log X_n)/n \leq -\varepsilon$. Alors pour tout $n \geq N$ on aura $\log X_n \leq -n\varepsilon$ d'où $\log X_\infty = \limsup \log X_n \leq \limsup -n\varepsilon = -\infty$ p.s., ce qui assure que $X_\infty = 0$ p.s..

c) On suppose dorénavant que $\mathbb{P}[Y_1 = 1] < 1$. Fixons $n \geq 1$ et observons que $\log(\delta \vee Y_n) \downarrow \log Y_n$ p.s. quand $\delta \downarrow 0$. Le théorème de convergence monotone assure alors que (avec la notation $x_- = |x| \mathbb{1}_{x \leq 0}$) :

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \uparrow \mathbb{E}\left[(\log(\delta \vee Y_n))_-\right] = \mathbb{E}\left[(\log Y_n)_-\right] \in [0, \infty]$$

Il y a alors deux cas possibles :

— Soit $\mathbb{E}[(\log Y_n)_-] < \infty$, alors $\log Y_n \in L^1$ et pour $\delta < 1$:

$$\mathbb{E}[\log(\delta \vee Y_n)] = \mathbb{E}[\log_+ Y_n] - \mathbb{E}[(\log(\delta \vee Y_n))_-] \underset{\delta \downarrow 0}{\downarrow} \mathbb{E}[\log Y_n] \underset{\text{Jensen}}{<} 0$$

On pourra donc trouver $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}[\log(\delta \vee Y_n)] < 0$.

— Sinon $\mathbb{E}[(\log Y_n)_-] = \infty$, et alors, en remarquant que $0 \leq \mathbb{E}[\log_+ Y_n] = \mathbb{E}[(\log Y_n) \vee 0] \leq \mathbb{E}[Y_n] < \infty$, on en déduit qu'il existe $\delta > 0$ vérifiant $\mathbb{E}[(\log(\delta \vee Y_n)) \wedge 0] < -\mathbb{E}[\log_+ Y_n]$. On aura alors :

$$\mathbb{E}[\log(\delta \vee Y_n)] = \mathbb{E}[(\log(\delta \vee Y_n))_-] + \mathbb{E}[\log_+ Y_n] < 0$$

Fixons à présent un tel $\delta > 0$ et notons $Z_n := \delta \vee Y_n$ pour tout $n \geq 1$. Notons aussi $W_n := \prod_{k=1}^n Z_k$ et remarquons que puisque $Y_k \leq Z_k$, on a $X_n \leq W_n$. Avec des arguments similaires à ceux utilisés dans les questions précédentes, on montre facilement que $(\log W_n)/n \to \mathbb{E}[\log Z_1] < 0$ puis que $\log X_\infty = \limsup \log X_n \leq \limsup \log W_n = -\infty$ p.s., ce qui assure que $X_\infty = 0$ p.s..

d) La martingale X est bornée dans L^1, en effet, $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n|] = \sup_n \mathbb{E}[X_n] = 1 < \infty$. On est donc dans les conditions d'application de théorème de convergence de Doob et on a bien l'existence d'une v.a. X_∞ telle que $X_n \to X_\infty$ p.s., mais vu que $\mathbb{E}[X_n] = 1 \neq 0 = \mathbb{E}[X_\infty]$, on n'a pas convergence dans L^1.

Exercice 5 a) Clairement, puisque $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, on a $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_{n+1}] \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n] = X_n$ d'où $(X_n)_n$ est bien une martingale. De plus, en utilisant l'inégalité de Jensen conditionnelle, on obtient :

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n])^2\right] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[X^2] = 1$$

Ceci assure que la martingale $(X_n)_n$ est bornée dans L^2.

b) En tant que martingale bornée dans L^2, le processus $(X_n)_n$ va converger p.s. et dans L^2 vers une v.a. $X_\infty \in L^2$.

c) Pour $n \geq i \geq 1$, on a :

$$Z_n = X - \frac{1}{1+\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2} Y_k = X - \frac{1}{1+\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2} (X+\xi_k)$$
$$= \frac{1}{1+\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} \left[X - \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2} \xi_k \right]$$

d'où $\quad \mathbb{E}[Z_n Y_i] = \mathbb{E}[Z_n X] + \mathbb{E}[Z_n \xi_i] \quad$ or $X, \xi_1, \dots, \xi_n$ sont indépendants et centrés

$$= \frac{\mathbb{E}[X^2] - \varepsilon_i^{-2}\mathbb{E}[\xi_i^2]}{1+\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} = \frac{1-\varepsilon_i^{-2}\varepsilon_i^2}{1+\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} = 0$$

d) Les v.a. $X, \xi_1, \dots, \xi_n$ étant gaussiennes et indépendantes, $(X, \xi_1, \dots, \xi_n)$ est un vecteur gaussien. En tant que transformation linéaire de ce dernier, $(Z_n, Y_1, \dots, Y_n)$ est lui aussi un vecteur gaussien. De ce fait et puisque $\mathbb{E}[Z_n Y_i] = \mathrm{Cov}(Z_n, Y_i) = 0$ quel que soit $i = 1, \dots, n$, on a bien $Z_n \perp\!\!\!\perp (Y_1, \dots, Y_n)$.
Remarquons que la v.a. $X - Z_n$ est une transformation linéaire du vecteur gaussien $(Y_1, \dots, Y_n)$ et est donc $\mathcal{F}_n$ mesurable. De plus, comme on l'a vu dans l'exercice 11 du TD1, $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$ est l'unique v.a. obtenue comme transformation linéaire de $(Y_1, \dots, Y_n)$ qui vérifie pour tout $i = 1, \dots, n$, $\mathrm{Cov}(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n], Y_i) = \mathrm{Cov}(X, Y_i)$. Or on a :

$$\mathrm{Cov}(X - Z_n, Y_i) = \mathrm{Cov}(X, Y_i) - \mathrm{Cov}(Z_n, Y_i) = \mathrm{Cov}(X, Y_i)$$

On a donc $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n] = X - Z_n$.

e) Pour tout $n \geq 1$, puisque les v.a. $X, \xi_1, \dots, \xi_n$ sont indépendantes et centrées, on a :

$$\mathbb{E}[(X - X_n)^2] = \mathbb{E}[Z_n^2] = \frac{1}{\left[1+\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}\right]^2} \left(\mathbb{E}[X^2] + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-4} \mathbb{E}[\xi_k^2] \right) = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}}$$

Alors :

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} X \iff \mathbb{E}[(X - X_n)^2] = \mathbb{E}[Z_n^2] = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^{-2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$\iff \sum_{n\geq 1} \varepsilon_n^{-2} = +\infty$$