MIDO M1 MMD Université Paris-Dauphine 14/15
Processus discrets `[v.1 20141128]`

TD4. Chaînes de Markov. Corrigé.

Exercice 1 Notons Y_n le résultat du n-ième lancer de dé, qui suit une loi uniforme sur $\{1,\dots,6\}$. Les $(Y_n)_{n\geq 1}$ sont indépendants.

a) On a $X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1})$, où $f(x,y) = x$ si $x \leq y$ et $f(x,y) = y$ si $y > x$. De plus, Y_{n+1} et X_n sont indépendants donc (X_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

b) On a $N_{n+1} = f(N_n, Y_{n+1})$ où $f(k,y) = k+1$ si $y = 6$ et $f(k,y) = k$ si $y \neq 6$. De plus, Y_{n+1} et N_n sont indépendants donc (N_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$Q(i,j) = \frac{1}{6}\mathbf{1}\{j = i+1\} + \frac{5}{6}\mathbf{1}\{j = i\}, \quad i,j \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

c) On a $C_{n+1} = f(C_n, Y_{n+1})$ où $f(k,y) = 0$ si $y = 6$ et $f(k,y) = k+1$ si $y \neq 6$. De plus, Y_{n+1} et C_n sont indépendants donc (C_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$Q(i,j) = \frac{1}{6}\mathbf{1}\{j = 0\} + \frac{5}{6}\mathbf{1}\{j = i+1\}, \quad i,j \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

d) Comme $\mathrm{P}(B_4 = 5 | B_3 = 3, B_2 = 1, B_1 = 0) = 5/6$ est différent de $\mathrm{P}(B_4 = 5 | B_3 = 3, B_2 = 2, B_1 = 1) = 1/6$, (B_n) n'est pas une chaîne de Markov.

Exercice 2 Notons Z_n^A la variable aléatoire valant 1 si le tank A touche sa cible au n-ième coup, et 0 sinon. De même pour B et C. Alors (Z_n^A), (Z_n^B) et (Z_n^C) sont des suites de variables aléatoires i.i.d., indépendantes entre elles. Notons X_n l'ensemble des tanks survivant au temps n. Cette variable aléatoire est à valeurs dans $\mathcal{P}(\{A,B,C\})$, l'ensemble des sous-parties de $\{A,B,C\}$. D'après l'énoncé, si les trois tanks sont encore en vie, alors A cible B tandis que B et C ciblent A (cela implique que l'état $\{A,B\}$ peut être enlevé de l'espace d'état). Si seuls deux tanks sont en vie, ils tirent l'un sur l'autre. On peut alors écrire $X_{n+1} = f(X_n, Z_n^A, Z_n^B, Z_n^C)$, où $f(\{A,B,C\},0,0,0) = \{A,B,C\}$, $f(\{A,B,C\},0,0,1) = \{B,C\}$, etc. La suite (X_n) est donc une chaîne de Markov de matrice de transition : (seuls les premiers termes sont détaillés)

$$\begin{aligned} Q(\{A,B,C\},\{A,B,C\}) &= \mathrm{P}(Z_1^A = Z_1^B = Z_1^C = 0) = 1/9, \\ Q(\{A,B,C\},\{B,C\}) &= \mathrm{P}(Z_1^A = 0, Z_1^B = 1 \text{ ou } Z_1^C = 1) = 2/9, \quad \text{etc.} \end{aligned} \tag{4}$$

Si les éléments de l'espace d'états $\mathcal{P}(\{A,B,C\})$ sont rangés dans l'ordre

$$\{A,B,C\}, \{B,C\}, \{A,C\}, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \emptyset, \tag{5}$$

alors

$$Q = \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 & 0 & 0 & 4/9 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 2/9 & 4/9 & 0 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Exercice 3 Notons P_{x_0} la loi de (X_n) partant de $X_0 = x_0$.

a) On a

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_{x_0}(W_1 = x_1, W_2 = x_2, \dots, W_{n-1} = x_{n-1}, W_n = x_n) \\ &= \mathrm{P}_{x_0}(X_{1+k} = x_1, X_{2+k} = x_2, \dots X_{n-1+k} = x_{n-1}, X_{n+k} = x_n) \\ &= P^{k+1}(x_0, x_1)P(x_1, x_2)\dots P(x_{n-1}, x_n). \end{aligned} \tag{7}$$

Donc (W_n) est une chaîne de Markov ayant P pour matrice de trainsition.

b) On a

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_{x_0}(Y_1 = x_1, Y_2 = x_2, \dots, Y_{n-1} = x_{n-1}, Y_n = x_n) \\ &= \mathrm{P}_{x_0}(X_2 = x_1, X_4 = x_2, \dots X_{2n-2} = x_{n-1}, X_{2n} = x_n) \\ &= P^2(x_0, x_1)P^2(x_1, x_2)\dots P^2(x_{n-1}, x_n). \end{aligned} \tag{8}$$

Donc (W_n) est une chaîne de Markov ayant P^2 pour matrice de trainsition.

c) On fait ici l'hypothèse que les processus (X_n) et (S_n) sont indépendants. On a alors

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_{x_0}(Z_1 = x_1, Z_2 = x_2, \dots, Z_{n-1} = x_{n-1}, ZY_n = x_n) \\ &= \mathrm{P}_{x_0}(X_{T_1} = x_1, X_{T_2} = x_2, \dots X_{T_{n-1}} = x_{n-1}, X_{T_n} = x_n) \\ &= \sum_{0=:t_0<t_1<\dots<t_n} \mathrm{P}_x(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, X_{t_n} = x_n) \\ &\qquad\qquad \times \prod_{i=1}^n \mathrm{P}(S_i = t_i - t_{i-1}), \quad \text{car } (X_n) \perp (S_n) \\ &= \sum_{0=:t_0<t_1<\dots<t_n} \prod_{i=1}^n P^{t_i - t_{i-1}}(x_{i-1}, x_i) \times \prod_{i=1}^n \mathrm{P}(S_1 = t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{s_1,\dots,s_n \geq 1} \prod_{i=1}^n P^{s_i}(x_{i-1}, x_i)\mathrm{P}(S_1 = s_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{s\geq 1} P^s(x_{i-1}, x_i)\mathrm{P}(S_1 = s) \right), \end{aligned} \tag{9}$$

donc (Z_n) est une chaîne de Markov de matrice de transition $\sum_{s\geq 1} P^s \times \mathrm{P}(S_1 = s)$.

Exercice 4 a)

b) Comme $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 \to 5 \to 4 \to 1$, tous les états appartiennent à la même classe de communication. Or, l'espace d'état est fini donc tous les états sont récurrents.

c) Il n'y a qu'une classe de communication donc la chaîne est irréductible.

d) Comme $\mathrm{P}(X_1 = 3|X_0 = 2) = 1$, il vient $\mathrm{P}(X_3 = 1|X_0 = 2) = \mathrm{P}(X_2 = 1|X_0 = 3)$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_2 = 1|X_0 = 3) &= \mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 1|X_0 = 3) + \mathrm{P}(X_1 = 4, X_2 = 1|X_0 = 3)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{4}.\end{aligned} \tag{10}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(T_2 < T_5|X_0 = 1)\\ &= \mathrm{P}(X_1 = 2|X_0 = 1) + \sum_{n\geq 1} \mathrm{P}(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1, X_{n+1} = 2|X_0 = 1)\\ &= \frac{1}{3} \times \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{3}.\end{aligned} \tag{11}$$

e) D'une part, on a trivialement $u(2) = 1$ et $u(5) = 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned}u(1) &= \mathrm{P}(T_2 < T_5|X_0 = 1)\\ &= \mathrm{P}(X_1 = 1, T_2 < T_5|X_0 = 1) + \mathrm{P}(X_1 = 2, T_2 < T_5|X_0 = 1)\\ &\qquad + \mathrm{P}(X_1 = 5, T_2 < T_5|X_0 = 1)\\ &= \frac{1}{2}\ u(1) + \frac{1}{3}u(2) + \frac{1}{6}u(5),\end{aligned} \tag{12}$$

et

$$\begin{aligned}u(3) &= \mathrm{P}(T_2 < T_5|X_0 = 3)\\ &= \mathrm{P}(X_1 = 1, T_2 < T_5|X_0 = 3) + \mathrm{P}(X_1 = 4, T_2 < T_5|X_0 = 3)\\ &= \frac{1}{2}u(1) + \frac{1}{2}u(4),\\ u(4) &= \mathrm{P}(T_2 < T_5|X_0 = 4) = \mathrm{P}(X_1 = 1, T_2 < T_5|X_0 = 4) = u(1).\end{aligned} \tag{13}$$

Donc u satisfait la relation linéaire :

$$u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

f) On a (en détaillant seulement les premiers termes)

$$\begin{aligned}v(1) &= \mathrm{E}(e^{-\lambda T_5}|X_0 = 1)\\ &= \mathrm{E}(e^{-\lambda T_5}\mathbf{1}\{X_1 = 1\}|X_0 = 1) + \mathrm{E}(e^{-\lambda T_5}\mathbf{1}\{X_1 = 2\}|X_0 = 1)\\ &\qquad + \mathrm{E}(e^{-\lambda T_5}\mathbf{1}\{X_1 = 5\}|X_0 = 1)\\ &= \frac{1}{2}e^{-\lambda}v(1) + \frac{1}{3}e^{-\lambda}v(2) + \frac{1}{6}e^{-\lambda}v(5)\\ v(2) &= \mathrm{E}(e^{-\lambda T_5}|X_0 = 1)\\ &= \mathrm{E}(e^{-\lambda T_5}\mathbf{1}\{X_1 = 3\}|X_0 = 1)\\ &= e^{-\lambda}\mathrm{E}(e^{-\lambda T_5}|X_0 = 3) = e^{-\lambda}v(3)\\ v(3) &= \ldots\end{aligned} \tag{15}$$

On obtient finalement

$$v = \begin{pmatrix} \frac{e^{-\lambda}}{2} & \frac{e^{-\lambda}}{3} & 0 & 0 & \frac{e^{-\lambda}}{6} \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ \frac{e^{-\lambda}}{2} & 0 & 0 & \frac{e^{-\lambda}}{2} & 0 \\ e^{-\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Exercice 5 a) Soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ la suite de v.a.i.i.d. définie par

$$Z_n = \begin{cases} 1 & \text{si le joueur gagne au temps } n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{17}$$

Alors $X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$ où

$$\begin{cases} f(x,1) = x+1 & \text{si } x < a+b, \\ f(x,0) = x-1 & \text{si } x > 0, \\ f(a+b,1) = f(a+b,0) = a+b, \\ f(0,1) = f(0,0) = 0, \end{cases} \tag{18}$$

donc (X_n) est une chaîne de Markov. Son espace d'état est $M = \{0, 1, \ldots, a+b\}$ et sa matrice de transition P vérifie $P(0,0) = 1$, $P(a+b, a+b) = 1$ et si $0 < x < a+b$,

$$P(x, x-1) = 1-p, \quad P(x, x+1) = p. \tag{19}$$

b) On montre facilement que $u(0) = 0$ et $u(a+b) = 1$ (le faire quand même), puis pour $0 < x < a+b$,

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathrm{P}(X_T = a+b, T < \infty | X_0 = x) \\ &= \mathrm{P}(X_1 = x+1, X_T = a+b, T < \infty | X_0 = x) \\ &\qquad + \mathrm{P}(X_1 = x-1, X_T = a+b, T < \infty | X_0 = x) \\ &= p\mathrm{P}(X_T = a+b, T < \infty | X_0 = x+1) \\ &\qquad + (1-p)\mathrm{P}(X_T = a+b, T < \infty | X_0 = x-1) \\ &= pu(x+1) + (1-p)u(x-1). \end{aligned} \tag{20}$$

c) L'équation $pz^2 - z + 1 - p$ a pour racines 1 et $\frac{1}{p} - 1$, qui sont distinctes si $p \neq \frac{1}{2}$. Dans ce cas, il existe donc deux constantes c_- et c_+ telles que

$$u(x) = c_- + c_+ \left(\frac{1}{p} - 1 \right)^x, \quad x \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

En utilisant les conditions au bord $u(0) = 0$ et $u(a+b) = 1$, on obtient

$$u(x) = \frac{p^{a+b}}{(1-p)^{a+b} - p^{a+b}} \left[\left(\frac{1}{p} - 1 \right)^x - 1 \right]. \tag{22}$$

Si $p = \frac{1}{2}$, alors il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$u(x) = c_1 x + c_2. \tag{23}$$

En utilisant les conditions au bord $u(0) = 0$ et $u(a+b) = 1$, on obtient

$$u(x) = \frac{x}{a+b}. \tag{24}$$

De la même manière, mais avec des conditions au bord différentes, on obtient

$$v(x) = \frac{p^{a+b}\left(\frac{1}{p}-1\right)^x - (1-p)^{a+b}}{p^{a+b}-(1-p)^{a+b}}, \quad \text{si } p \neq \frac{1}{2}, \tag{25}$$

et

$$v(x) = 1 - \frac{x}{a+b}, \quad \text{si } p = \frac{1}{2}. \tag{26}$$

On peut vérifier par un calcul direct que pour tout x dans M,

$$\mathrm{P}(T < \infty | X_0 = x) = u(x) + v(x) = 1. \tag{27}$$

d) On est dans le cas $p = \frac{1}{2}$. Définissons pour tout y dans $\mathbb{N}$, $T_y = \inf\{n \geq 0\colon X_n = y\}$. Alors d'après les questions précédentes,

$$\mathrm{P}(T_{a+b} > T_0 | X_0 = x) = 1 - \frac{x}{a+b}. \tag{28}$$

Or, $\{T_0 < \infty\}$ est l'union pour $b \geq 1$ des événements croissants $\{T_0 < T_{a+b}\}$, donc d'après le théorème de convergence monotone, lorsque $b = \infty$,

$$v(x) = \mathrm{P}(T_0 < \infty | X_0 = x) = \lim_{b \to \infty} 1 - \frac{x}{a+b} = 0. \tag{29}$$

e) Comme $T = 0$ sur les événements $\{X_0 = 0\}$ et $\{X_T = a+b\}$, on a clairement $m(0) = m(a+b) = 0$. D'autre part, si $0 < x < a+b$,

$$\begin{aligned} m(x) &= \mathrm{E}(T | X_0 = x) \\ &= \mathrm{E}(T1\{X_1 = x-1\} | X_0 = x) + \mathrm{E}(T1\{X_1 = x+1\} | X_0 = x) \\ &= \mathrm{P}(X_1 = x-1 | X_0 = x)\mathrm{E}(T+1 | X_0 = x-1) \\ &+ \mathrm{P}(X_1 = x+1 | X_0 = x)\mathrm{E}(T+1 | X_0 = x+1), \quad \text{par la propriété de Markov,} \\ &= (1-p)(1+m(x-1)) + p(1+m(x)) \\ &= 1 + pm(x+1) + (1-p)m(x-1). \end{aligned} \tag{30}$$

f) Il faut ici supposer $p = 1/2$. On vérifie par un calcul direct que la solution proposée est bien une solution, et il reste à prouver l'unicité. Soient m_1 et m_2 deux solutions. Alors $m_1 - m_2$ satisfait l'équation vérifiée par u dans la question b). Ainsi, il existe c_0 et c_1 tels que

$$m_1(x) - m_2(x) = c_0 + c_1 x. \tag{31}$$

Mais les conditions au bord $m(0) = m(a+b) = 0$ imposent $c_0 = c_1 = 0$, donc $m_1 = m_2$.

g) Notons $T^{(b)}$ à la place de T pour insister sur la dépendance en b, et remarquons que T_0 est la limite croissante de $T^{(b)}$, lorsque $b \to \infty$. Par le théorème de convergence monotone, on obtient pour $x > 0$

$$\mathrm{E}(T_0 | X_0 = x) = \lim_{b \to \infty} \mathrm{E}(T^{(b)} | X_0 = x) = \lim_{b \to \infty} x(a+b-x) = +\infty. \tag{32}$$

Exercice 6

Exercice 7 On peut remarquer en début d'exercice que $(Pf)(x) = \mathrm{E}_x(f(X_1))$.

a) On a (i) M_n fonction mesurable des $(X_0, \dots, X_n)$ donc $\mathcal{F}_n$-mesurable, et donc (M_n) est une processus adapté, (ii) $M_n \leq n\|f\|_\infty$ donc M_n est intégrable, et (iii) $\Delta M_{n+1} = M_{n+1} - M_n = f(X_{n+1}) - (Pf)(X_n)$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n) &= \mathrm{E}(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) - (Pf)(X_n) \\
&= \mathrm{E}(f(X_{n+1})|X_n) - (Pf)(X_n) \\
&\qquad\qquad\qquad \text{car } (X_n) \text{ est une chaîne de Markov} \\
&= \sum_x (Pf)(x)\mathbf{1}\{X_n = x\} - (Pf)(X_n) \\
&= (Pf)(X_n) - (Pf)(X_n) = 0.
\end{aligned} \tag{33}$$

Ainsi, (M_n) est une martingale.

b) Clairement, (V_n) est adaptée et $|V_n| \leq (n^2 + n)\|f\|_\infty$, donc V_n est intégrable. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\Delta V_{n+1} := V_{n+1} - V_n &= M_{n+1}^2 - M_n^2 - P(f^2)(X_n) + (Pf)(X_n)^2 \\
&= \Delta M_{n+1}(2M_n + \Delta M_{n+1}) - P(f^2)(X_n) + (Pf)(X_n)^2, \qquad (34)\\
\mathrm{E}(\Delta V_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathrm{E}(\Delta M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - P(f^2)(X_n) + (Pf)(X_n)^2.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\Delta M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) &= \mathrm{E}(f^2(X_{n+1}) - 2(Pf)(X_n)f(X_{n+1}) + (Pf)(X_n)^2|\mathcal{F}_n) \\
&= P(f^2)(X_n) - (Pf)(X_n)^2,
\end{aligned} \tag{35}$$

d'où $\mathrm{E}(\Delta V_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0$, et (V_n) est une martingale.

c) Remarquons que

$$\Delta Q_{n+1} = Q_{n+1} - Q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq N \\ (P^{N-n-1}f)(X_{n+1}) - (P^{N-n}f)(X_n) & \text{si } n+1 \leq N \end{cases} \tag{36}$$

Trivialement, $\mathrm{E}(\Delta Q_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0$ si $n \geq N$, et si $n+1 \leq N$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\{(P^{N-n-1}f)(X_{n+1}) - (P^{N-n}f)(X_n)|\mathcal{F}_n\} \\
&= \mathrm{E}\{(P^{N-n-1}f)(X_{n+1})|X_n\} - (P^{N-n}f)(X_n) = 0,
\end{aligned} \tag{37}$$

donc (Q_n) est une martingale. D'autre part,

$$\begin{aligned}
Q_N &= f(X_N) - (P^N f)(X_0) \\
&= f(X_N) - (P^N f)(x_0) \quad \text{p.s.} \\
&= f(X_N) - \mathrm{E}[f(X_N)].
\end{aligned} \tag{38}$$

d) Montrons que la relation est vraie pour $n \leq N$, le cas $n > N$ étant trivial. Soit $n \leq N$. Alors

$$Q_n - Q_{n-1} = (P^{N-n}f)(X_n) - (P^{N-n+1}f)(X_{n-1}), \tag{39}$$

et comme $|X_n - X_{n-1}| = 1$ p.s., il suffit de prouver que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ et $k \geq 0$,

$$|P^k f(x+\varepsilon) - P^{k+1}f(x)| \leq 2. \tag{40}$$

Prouvons-le pour $\varepsilon = 1$, le cas $\varepsilon = -1$ étant strictement similaire. Il vient

$$\begin{aligned}
&(P^k f)(x+1) - (P^{k+1} f)(x) \\
&= \mathrm{E}_{x+1}(f(X_k)) - \mathrm{E}_x(f(X_{k+1})) \\
&= \mathrm{E}_{x+1}(f(X_k)) - \frac{1}{2}\mathrm{E}_{x+1}(f(X_k)) - \frac{1}{2}\mathrm{E}_{x-1}(f(X_k)) \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\mathrm{E}_{x+1}(f(X_k)) - \mathrm{E}_{x-1}(f(X_k))\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\sum_{y_1,\ldots,y_k\in\{\pm 1\}} \frac{1}{2^k} f(x+1+y_1+\ldots+y_k) - \sum_{y_1,\ldots,y_k\in\{\pm 1\}} \frac{1}{2^k} f(x-1+y_1+\ldots+y_k)\Big\} \\
&= \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{y_1,\ldots,y_k\in\{\pm 1\}} \Big\{f(x+1+y_1+\ldots+y_k) - f(x-1+y_1+\ldots+y_k)\Big\},
\end{aligned} \tag{41}$$

et ainsi,

$$\begin{aligned}
&|(P^k f)(x+1) - (P^{k+1} f)(x)| \\
&\le \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{y_1,\ldots,y_k\in\{\pm 1\}} \Big|f(x+1+y_1+\ldots+y_k) - f(x-1+y_1+\ldots+y_k)\Big| \\
&\le \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{y_1,\ldots,y_k\in\{\pm 1\}} \Big|(x+1+y_1+\ldots+y_k) - (x-1+y_1+\ldots+y_k)\Big| \le 1.
\end{aligned} \tag{42}$$