TD5. Chaînes de Markov (II).

Exercice 1 a) Sachant que $X_n = i$, la probabilité qu'un chromosome donné soit de type A à la génération $n+1$ est de i/N (i.e. la probabilité de choisir un des i chromosomes de type A parmi les N qui composent la génération n). Par hypothèse, les types des chromosomes enfants sont choisis indépendamment les uns des autres donc, conditionnellement à $X_n = i$, X_{n+1} est de loi binomiale de paramètres i/N et N.

Enfin, pour tout n, on a clairement $\mathcal{L}(X_{n+1}/X_0, \dots, X_n) = \mathcal{L}(X_{n+1}/X_n)$, ce qui assure que le processus $(X_n)_n$ est bien une chaine de Markov. Ainsi, en notant P la matrice de transition de X, pour $0 \le i, j \le N$, on a :

$$P(i,j) = \mathbb{P}[\mathcal{B}(i/N, N) = j] = \binom{N}{j}(i/N)^j (1 - i/N)^{N-j}$$

Alternativement, on peut montrer que $(X_n)_n$ est un système dynamique aléatoire et donc une chaine de Markov. Notons pour cela $(\xi_n^{(k)})_{k=1,\dots,N,\, n\ge1}$ de sorte que $\xi_n^{(k)}$ représente le chromosome parent du $k^{\text{ème}}$ chromosome de la génération n (où les X_n 1ers chromosomes sont ceux de type A, suivis de ceux de type B). Ces v.a. sont alors i.i.d. de loi uniforme sur $\{1, \dots, N\}$, indépendantes de X_0 et on pourra écrire $X_{n+1} = \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{\xi_{n+1}^{(k)} \le X_n}$ ou encore $X_{n+1} = F[X_n, \xi_{n+1}^{(1)}, \dots, \xi_{n+1}^{(N)}]$ où l'application $F : \{0, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}^N \to \{0, \dots, N\}$, est définie par $F[x, y_1, \dots, y_N] = \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{y_k \le x}$.

b) Remarquons que les deux états 0 et N sont absorbants. En particuliers, ils ne communiquent pas et la chaine n'est donc pas irréductible.

c) Puisque 0 et N sont des états absorbants, on a $\delta_0 P = \delta_0$ et $\delta_N P = \delta_N$. Les mesures de Dirac en 0 et en N sont donc des probabilités stationnaires pour P. De plus, par linéarité, pour tout $u \in [0,1]$, si $\pi = u\delta_0 + (1-u)\delta_N$, on a $\pi = \pi P$. La chaine admet donc une infinité de probabilités stationnaires.

Exercice 4 a) On a $X_{n+1} = \mathbb{1}_{U_{n+1}=1}\mathbb{1}_{X_n=0} + \mathbb{1}_{V_{n+1}=0}\mathbb{1}_{X_n=1}$, ou encore $X_{n+1} = U_{n+1}(1 - X_n) + (1 - V_{n+1})X_n$. Ainsi, on peut écrire $X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1}, V_{n+1})$ avec $F : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ définie par $F(x,u,v) = u(1-x) + (1-v)x$.

b) Pour $n \ge 0$, on a :

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= \mathbb{P}[X_{n+1} = 0] = \mathbb{P}[X_{n+1} = 0, X_n = 0] + \mathbb{P}[X_{n+1} = 0, X_n = 1] \\ &= \mathbb{P}[X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0]\,\mathbb{P}[X_n = 0] + \mathbb{P}[X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1]\,\mathbb{P}[X_n = 1] \\ &= \mathbb{P}[U_{n+1} = 0]\,g_n + \mathbb{P}[V_{n+1} = 1](1 - g_n) = (1-a)g_n + b(1 - g_n) \end{aligned}$$

Par récurrence, on trouve alors :

$$g_n = (1-a-b)^n g_0 + \frac{1 - (1-a-b)^n}{a+b} b$$

c) On a :

$$\begin{aligned} r_n(0) &= \mathbb{P}[X_n = 0 \,|\, X_0 = 0] = (1-a-b)^n + \frac{1-(1-a-b)^n}{a+b} b \\ &= (1-a-b)^n [1 - b/(a+b)] + b/(a+b) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r_n(1) &= 1 - \mathbb{P}[X_n = 0 \,|\, X_0 = 1] = 1 - \frac{1-(1-a-b)^n}{a+b} b \\ &= (1-a-b)^n [1 - a/(a+b)] + a/(a+b) \end{aligned}$$

d) Remarquons que, avec $\alpha = a \wedge b/(a+b)$ et en supposant $a+b<1$, on a :

$$\begin{aligned} r_n &= \mathbb{P}[X_n = X_0] = \mathbb{P}\left[\textstyle\bigcap_{i=1}^l (X_n^i = X_0^i)\right] \stackrel{\perp\!\!\!\perp}{=} \textstyle\prod_{i=1}^l \mathbb{P}\left[X_n^i = X_0^i\right] \\ &\geq [r_n(0) \wedge r_n(1)]^l = \left[\alpha + (1-\alpha)(1-a-b)^n\right]^l \end{aligned}$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ fixé :

$$\begin{aligned} \left[\alpha + (1-\alpha)(1-a-b)^n\right]^l \geq 1-\varepsilon \quad &\iff \quad (1-a-b)^n \geq \frac{(1-\varepsilon)^{1/l} - \alpha}{1-\alpha} \\ &\iff \quad n \log(1-a-b) \geq \log\left[(1-\varepsilon)^{1/l} - \alpha\right] - \log(1-\alpha) \\ &\iff \quad n \leq \left\lfloor \frac{\log\left[(1-\varepsilon)^{1/l} - \alpha\right] - \log(1-\alpha)}{\log(1-a-b)} \right\rfloor =: n_c \end{aligned}$$

e) On a :

$$P^n = \begin{pmatrix} r_n(0) & 1 - r_n(0) \\ 1 - r_n(1) & r_n(1) \end{pmatrix}$$

La chaine de Markov X est fortement irréductible (tous les coefficient de P étant > 0) et récurrente positive (puisque $\{0,1\}$ est fini), ainsi, elle admet une unique probabilité stationnaire π et pour toute probabilité μ sur $\{0,1\}$, $\mu P^n \to \pi$. De plus $r_n(0) \to b/(a+b)$ et $r_n(1) \to a/(a+b)$, donc si μ est une probabilité sur $\{0,1\}$, on aura $\mu P^n \to (b,a)\,/\,(a+b) =: \pi$, i.e. $\pi(0) = b/(a+b)$ et $\pi(1) = a/(a+b)$.

f) D'après le théorème ergodique, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x,y)}{n} = \pi(y)$$

Exercice 6 a) Remarquons que par définition, $\theta(y) = 1$, et si $x \neq y$, on a :

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \mathbb{P}_x[T_y < \infty] = \mathbb{P}_x[\exists n \geq 1 \,:\, X_n = y] = \sum_{z\in M} \mathbb{P}_x[X_1 = z, \exists n \geq 0 \,:\, X_n = y] \\ &= \sum_{z\in M} P(x,z)\, \mathbb{P}_z[\exists n \geq 0 \,:\, X_n = y] = P(x,y) + \sum_{z\neq y} P(x,z)\, \mathbb{P}_z[\exists n \geq 1 \,:\, X_n = y] \\ &= \sum_{z\in M} P(x,z)\,\theta(z) = [P\theta](x) \end{aligned}$$

b) Puisque $\tilde\theta(x) = \theta(x)$ pour tout $x \neq y$ et $\tilde\theta(y) \leq 1 = \theta(y)$, en reprenant le raisonnement précédent, pour tout $x \in M$ (même pour $x = y$), on obtient :

$$\tilde\theta(x) = P(x,y) + \sum_{z\neq y} P(x,z)\, \mathbb{P}_z[T_y < \infty] \geq \sum_{z\in M} P(x,z)\,\tilde\theta(z)$$

c) Sous ces hypothèses, on aura $\tilde{\theta}(x) = \theta(x) = 1$ si $x \neq y$ et :

$$\tilde{\theta}(y) \geq \sum_{z \in M} P(y,z)\, \tilde{\theta}(z) \quad \text{d'où} \quad [1 - P(y,y)]\, \tilde{\theta}(y) = \sum_{z \neq y} P(y,z)$$
$$\text{i.e.} \quad [1 - P(y,y)]\, \tilde{\theta}(y) = 1 - P(y,y)$$

Deux cas sont alors possibles :
— soit $P(y,y) < 1$ et en simplifiant cette dernière égalité, on obtient $\tilde{\theta}(y) = 1$,
— soit $P(y,y) = 1$, et naturellement, $\tilde{\theta}(y) = 1$.

Exercice 8 a) On va montrer que le processus X peut être écrit sous forme d'un système dynamique aléatoire. Notons $(\xi_n)_{n \geq 1}$ la suite des "accidents" ou "retours à zéro" de notre processus. C'est suite de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $q := 1 - p$ et elle est indépendante de X_0. On définit de plus $F : \mathbb{N} \times \{0,1\} \to \mathbb{N}$ par $F(x,y) := (x+1)\mathbb{1}_{y=0}$. Avec ces notations, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = F(X_n, \xi_{n+1})$, d'où X est une chaine de Markov. Notons P sa matrice de transition, alors pour $i \in \mathbb{N}$, $P(i,0) = q$, $P(i, i+1) = p$ et $P(i,j) = 0$ si $j \neq 0$ et $j \neq i+1$.

b) La chaine de Markov X est irréductible (clairement tous ses états communiquent) et récurrente positive (puisque l'état 0 est lui-même récurrent positif). De ce fait, elle admet une unique probabilité stationnaire π, dont la fonction génératrice G vérifie pour tout $|z| \leq 1$:

$$\begin{aligned} G(z) &:= \sum_{k \geq 0} \pi(k)\, z^k = \sum_{k \geq 0} [\pi P](k)\, z^k \\ &= \sum_{i,j \geq 0} \pi(i)\, P(i,j)\, z^j = \sum_{i \geq 0} \pi(i) \left[q z^0 + p z^{i+1} \right] \\ &= \left[\textstyle\sum_{i \geq 0} \pi(i)\, q \right] + \sum_{k \geq 1} p\pi(k-1)\, z^k \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients des différentes écritures de cette série entière, on obtient $\pi(0) = \sum_{i \geq 0} \pi(i)\, q = q$ (car π est une mesure de probabilité) et $\pi(k+1) = p\pi(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui assure, par récurrence, que $\pi(k) = q\, p^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Un résultat du cours assure que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}_k[\tau_k] = 1/\pi(k) = q^{-1} p^{-k}$.

d) Un autre résultat du cours assure que pour tout $i \geq 1$:

$$\mathbb{E}_0\left[\textstyle\sum_{n=0}^{\tau_0 - 1} \mathbb{1}_{X_n = i} \right] = \mathbb{E}_0[T_0]\, \pi(i)$$
$$\text{d'où} \quad \mathbb{E}_0\left[\textstyle\sum_{n=0}^{\tau_0 - 1} \mathbb{1}_{X_n \geq k} \right] = \sum_{i \geq k} \mathbb{E}_0[T_0]\, \pi(i) = \frac{p^k}{q}$$

e) Observons que pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_x[X_n = 0] = q$. De plus si $y < n \in \mathbb{N}$, on a $\{X_n = y\} = \bigcap_{i=0}^{y} \{X_{n-i} = y - i\} = \{X_{n-y} = 0, \xi_{n-y+1} = 0, \dots, \xi_n = 0\}$. Alors si $x, y \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_x[X_n = y] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_x[X_{n-y} = 0, \xi_{n-y+1} = 0, \dots, \xi_n = 0] = q\, p^y = \pi(y)$$