Vorlesung 11 | 1.12.2020 | 14:15–16:00 via Zoom

Handzettel

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen: Unendliche Produkte, Faltungen, Stabilität gegen Faltung von Normalverteilungen.

Heutigen Vorlesung: die Irrfahr.

Definition 1. *Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von i.i.d. Z.V. mit $\mathbb{P}(X_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_k = -1) = p$. Dann heißt die Folge*

$$n \mapsto S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$$

die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ (simple random walk).

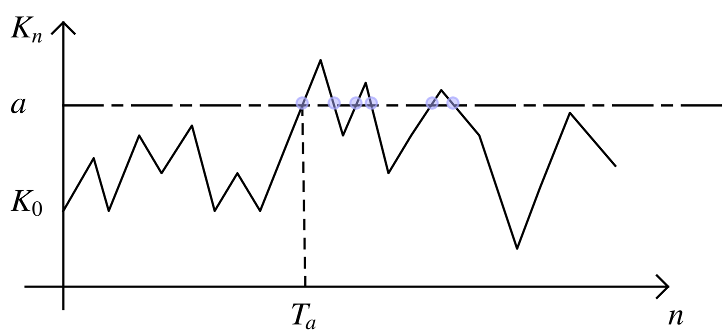
Fur $p = 1/2$ heißt die einfache symmetrische Irrfahrt.

Ruinproblem

$$K_n = K_0 + S_n$$

$$T_a = \inf\{n \geqslant 1 : K_n = a\} \qquad \left[\inf \emptyset = +\infty\right]$$

$$T_a : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$



$T_0 > T_a$

$$A = \left\{ \inf\{n \geqslant 1 : S_n = -K_0\} < \inf\{n \geqslant 1 : S_n = G\} \right\} = \{T_0 < T_{\tilde{G}}\}$$

mit $\tilde{G} = K_0 + G$.

$$\begin{cases} h(k) := \mathbb{P}\left(T_0 < T_{\tilde{G}} \middle| K_0 = k\right) & \text{für } 0 < k < \tilde{G} \\ h(0) = 1, \\ h(\tilde{G}) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(k) &=& (1-p)h(k-1) + (1-p)h(k+1), \quad 0 < k < \tilde{G} \\ h(0) &=& 1 \\ h(\tilde{G}) &=& 0 \end{cases}$$

Das Arcsinusgesetz

(a). $Z_{2n} := \sum_{\ell=1}^{2n} Y_\ell$ mit

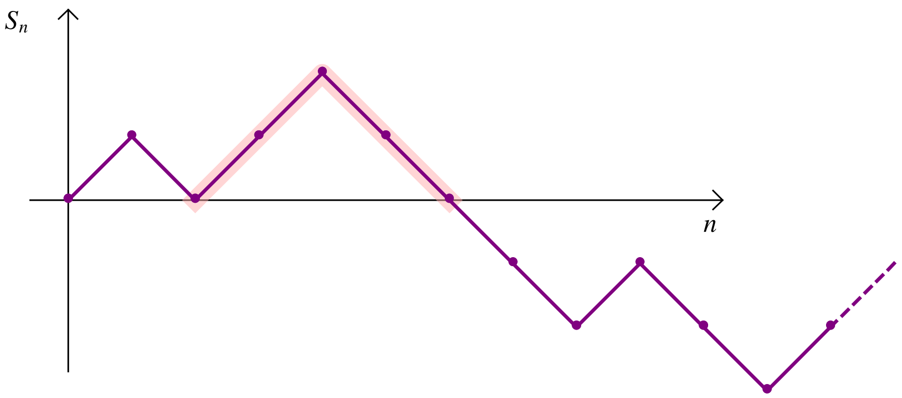
$$Y_\ell = \begin{cases} 1, & \text{falls } S_\ell > 0 \text{ oder } S_{\ell+1} > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z_{2n} = \sharp\text{schritten in positiven Bereich}$$

(b). $f_{2n} := \mathbb{P}\Big(\underbrace{\inf\{\ell > 0 : S_\ell = 0\}}_{\text{erste Rückkehr nach 0}} = 2n\Big)$

(c). Die W-keit Rückkehr nach $2n$ Schritten

$$u_{2n} := \mathbb{P}(S_n = 0)$$

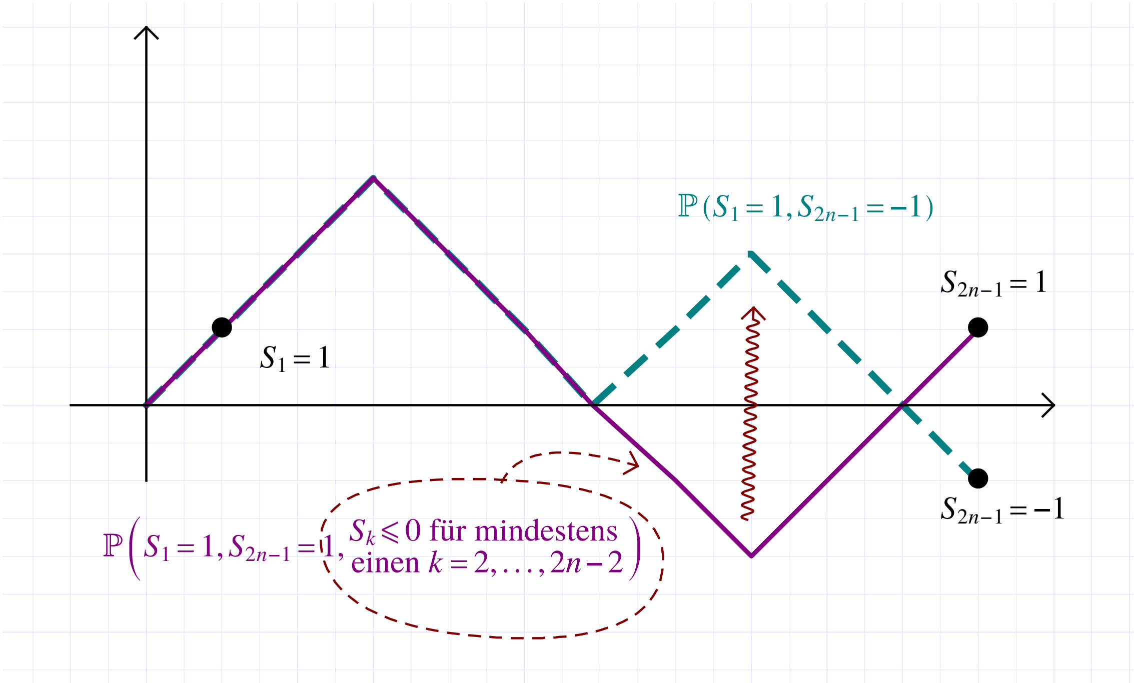


Lemma 2. *Es gilt*

$$(a) \quad u_{2n} = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$$

$$(b) \quad f_{2n} = \frac{1}{2^n} u_{2n-2} = u_{2n-2} - u_{2n}$$

Reflection principle:

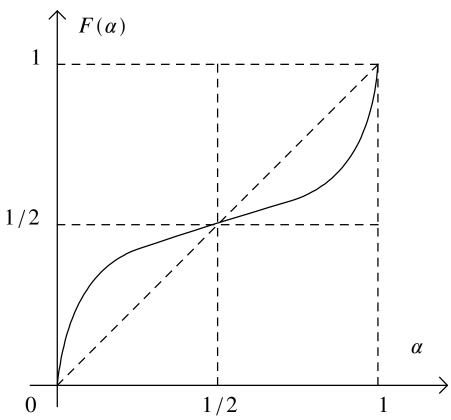


Satz 3. *Es gilt*

$$\mathbb{P}(Z_{2n}=2k) =: p_{2k,2n} = u_{2k} \cdot u_{2n-2k}$$

$$= \binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{2^{2(n-k)}}$$

Asymptotischer Ergebnis



Die Dichte

$$\rho(\alpha) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}F(\alpha) = \frac{1}{\pi(\alpha(1-\alpha))^{1/2}}$$

Es ist viel größer für $\alpha \approx 0$ oder $\alpha \approx 1$ als in der Mitte $\alpha \approx 1/2$.