Vorlesung 12 | 4.12.2020 | 10:15–12:00 via Zoom

Information der Fachschaft: Dieses Jahr findet die Mathe-Weihnachtsfeier am Donnerstag, 17.12, ab 18 ct. online via Zoom statt. Alle aktuellen Informationen sind auf https://fsmath.uni-bonn.de/veranstaltungen-detail/events/virtuelle-mathe-weihnachtsfeier.html zu finden. Schaut vorbei!

Information from the Fachschaft: This year's Math Christmas party will take place at Thursday, the 17.12. starting 18 ct. online via zoom. All current information can be found on https://fsmath.uni-bonn.de/events-detail/events/virtual-christmas-party.html. Swing by!

Handzettel

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen: Unendliche Produkte, Faltungen, Stabilität gegen Faltung von Normalverteilungen, Irrfahrt, Ruinproblem, Arcsinusgesetz.

Heutigen Vorlesung: Ende von die Arcsinusgesetz Aussage, Konvergenzbegriffe

Das Arcsinusgesetz

(a). $Z_{2n} := \sum_{\ell=1}^{2n} Y_\ell$ mit

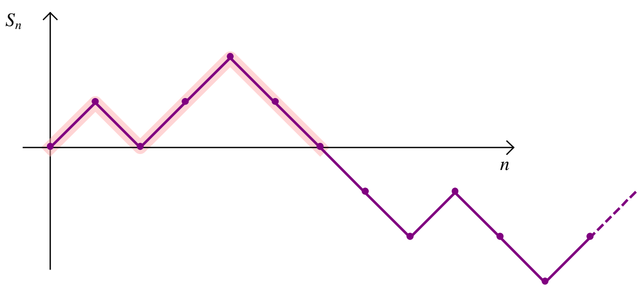
$$Y_\ell = \begin{cases} 1, & \text{falls } S_\ell > 0 \text{ oder } S_{\ell+1} > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z_{2n} = \sharp\text{schritten in positiven Bereich}$$

(b). $f_{2n} := \mathbb{P}\Big(\underbrace{\inf\{\ell > 0 : S_\ell = 0\}}_{\text{erste Rückkehr nach 0}} = 2n\Big)$

(c). Die W-keit Rückkehr nach $2n$ Schritten

$$u_{2n} := \mathbb{P}(S_n = 0)$$



Lemma. *Es gilt*

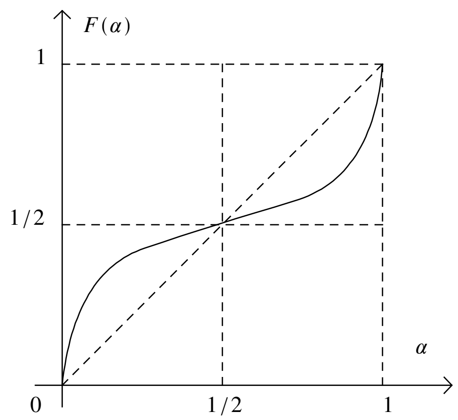
$$(a) \quad u_{2n} = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$$

$$(b) \quad f_{2n} = \frac{1}{2^n} u_{2n-2} = u_{2n-2} - u_{2n}$$

Satz. *Es gilt*

$$\mathbb{P}(Z_{2n} = 2k) =: p_{2k,2n} = u_{2k} \cdot u_{2n-2k}$$
$$= \binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{2^{2(n-k)}}$$

Asymptotischer Ergebnis



Die Dichte

$$\rho(\alpha) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} F(\alpha) = \frac{1}{\pi(\alpha(1-\alpha))^{1/2}}$$

Es ist viel größer für $\alpha \approx 0$ oder $\alpha \approx 1$ als in der Mitte $\alpha \approx 1/2$.

5 Konvergenzbefriffe

$$\mathrm{Bin}\left(n, \frac{\rho}{n}\right)(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{Poi}(\rho)(k), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

$$\mathrm{Geo}(q)\left(\{z \in \mathbb{R} : (1-q)z \leqslant x\}\right) \xrightarrow[q\to 1]{} \mathrm{Exp}(1)\left(\{z \in \mathbb{R} : z \leqslant x\}\right)$$

Sei $X_M \sim \left(1 - \frac{1}{M}\right)\delta_0 + \frac{1}{M}\delta_M$. Dann für alle $k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{M\to\infty} \mathbb{P}(X_M = k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Aber es gilt nicht:

$$\mathbb{E}[X_M] \not\xrightarrow[M\to\infty]{} \mathbb{E}[X_\infty] \qquad \text{mit } X_\infty \sim \delta_0$$

weil $\mathbb{E}[X_M] = 1$ für alle M.

Definition. *Sei $(F_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge von Verteilungsfunktionen. Dann konvergiert F_n schwach gegen eine Verteilungsfunktion F, falls*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ für welche F stetig ist.

Definition. *Sei $(\mathbb{P}_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge von W-maße auf $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$ mit Ω topoligische Raum. Dann konvergiert $(\mathbb{P}_n)_n$ schwach gegen $\mathbb{P}$ falls für alle beschränkten stetigen Funktionen $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g(\omega)\mathbb{P}_n(\mathrm{d}\omega) \to \int_\Omega g(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

Satz. *Sei $(\mathbb{P}_n)_n$ eine Folge W-maße auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ und $F_n(x) = \mathbb{P}_n((-\infty, x])$. Dann konvergiert $(\mathbb{P}_n)_n$ schwach gegen ein W-maß $\mathbb{P}$ mit Verteilungsfunktion F dann und nur dann, wenn*

$$F_n \xrightarrow[\text{schwach}]{} F.$$

5.1 Konvergenz von Z.V.

Definition. *(Konvergenz in Verteilung) Sei $(X_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge von Z.V. wobei X_n auf $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n)$ definiert ist. Dann konvergiert X_n in Verteilung gegen eine Z.V. X*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} X,$$

falls $F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \leqslant x) \xrightarrow[\text{schwach}]{} F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$.

Definition. *(Konvergenz in W-keit) Seien $X, (X_n)_n$ Z.V. auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Die Folge $(X_n)_n$ konvergiert in W-keit gegen X, falls $\forall \varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Lemma.

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X} \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} \boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} X}$$