Vorlesung 13 | 8.12.2020 | 14:15–16:00 via Zoom

Information der Fachschaft: Dieses Jahr findet die Mathe-Weihnachtsfeier am Donnerstag, 17.12, ab 18 ct. online via Zoom statt. Alle aktuellen Informationen sind auf https://fsmath.uni-bonn.de/veranstaltungen-detail/events/virtuelle-mathe-weihnachtsfeier.html zu finden. Schaut vorbei!

Information from the Fachschaft: This year's Math Christmas party will take place at Thursday, the 17.12. starting 18 ct. online via zoom. All current information can be found on https://fsmath.uni-bonn.de/events-detail/events/virtual-christmas-party.html. Swing by!

Handzettel

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen: Schwache convergenz von Verteilungsfuktionen und von W-Maße, Konvergenz in Verteilung von Z.V., Konvergenz in W-keit von Z.V.

Heutigen Vorlesung: Konvergenz in L^P, Fast sichere Konvergenz, Borel–Cantelli Lemmata,

5 Konvergenzbefriffe

Definition. *Sei $(F_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge von Verteilungsfunktionen. Dann konvergiert F_n schwach gegen eine Verteilungsfunktion F, falls*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ für welche F stetig ist.

Definition. *Sei $(\mathbb{P}_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge von W-maße auf $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$ mit Ω topoligische Raum. Dann konvergiert $(\mathbb{P}_n)_n$ schwach gegen $\mathbb{P}$ falls für alle beschränkten stetigen Funktionen $g: \Omega \to \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g(\omega)\mathbb{P}_n(\mathrm{d}\omega) \to \int_\Omega g(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

Satz. *Sei $(\mathbb{P}_n)_n$ eine Folge W-maße auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ und $F_n(x) = \mathbb{P}_n((-\infty, x])$. Dann konvergiert $(\mathbb{P}_n)_n$ schwach gegen ein W-maß $\mathbb{P}$ mit Verteilungsfunktion F dann und nur dann, wenn*

$$F_n \xrightarrow[\text{schwach}]{} F.$$

Definition. *(Konvergenz in Verteilung) Sei $(X_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge von Z.V. wobei X_n auf $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathbb{P}_n)$ definiert ist. Dann konvergiert X_n in Verteilung gegen eine Z.V. X*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} X,$$

falls $F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \leqslant x) \xrightarrow[schwach]{} F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$.

Definition. *(Konvergenz in W-keit) Seien* $X, (X_n)_n$ *Z.V. auf* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. *Die Folge* $(X_n)_n$ *konvergiert in W-keit gegen X, falls* $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Lemma.

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X} \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} \boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} X}$$

Satz. *(Satz von de Moivre–Laplace) Sei* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *eine Folge iid* $\mathrm{Ber}(p)$ *Z.V.. Dann konvergiert die Folge*

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - p\right)$$

in <u>Verteilung</u> gegen eine $\mathscr{N}(0, p(1-p))$ *Z.V.*

Definition. *(Konvergenz in* L^p*) Seien* $X, (X_n)_n$ *Z.V. auf* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. *Sei* $p \geqslant 1$ *und nehmen wir an* $(X_n)_{n\geqslant 1} \subseteq \mathscr{L}^p$, $X \in \mathscr{L}^p$ *d.h.* $\|X\|_p = \left[\mathbb{E}|X|^p\right]^{1/2} < \infty$. *Dann konvergiert* X_n *gegen X in* $\mathscr{L}^p$,

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}^p} X,$$

falls

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p = 0.$$

Lemma.

$$\boxed{X_n \xrightarrow{\mathscr{L}^p} X} \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} \boxed{X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X}$$

Definition. *(Fast sichere konvergenz) Sei* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *eine Folge von Z.V. auf* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. *Dann kovergiert* X_n *fast sicher gegen* $x \in \mathbb{R}$, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ *f.s. falls*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = x\right) = 1.$$

Lemma. *(Borel–Cantelli I) Sei* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *ein W-raum und* $(A_n)_{n\geqslant 1}$ *eine Folge in* $\mathscr{F}$. *Wenn*

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(A_n \text{ u.o.}) = 0.$$

Lemma. *(Borel–Cantelli II) Sei* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *ein W-raum und* $(A_n)_{n\geqslant 1}$ *eine Folge unabhängigen Ereignissen in* $\mathscr{F}$*. Wenn*

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(A_n \text{ u.o.}) = 1.$$

Folgerung.

a) *Eine Folge* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *konvergiert f.s. gegen* $x \in \mathbb{R}$ *wenn* $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(|X_n - x| > \varepsilon) < \infty \tag{1}$$

b) *Wenn die* $(X_n)_n$ *unabhängig sind, dann ist (1) notwending.*