Vorlesung 15 | 15.12.2020 | 14:15–16:00 via Zoom

Information der Fachschaft: Dieses Jahr findet die Mathe-Weihnachtsfeier am Donnerstag, 17.12, ab 18 ct. online via Zoom statt. Alle aktuellen Informationen sind auf https://fsmath.uni-bonn.de/veranstaltungen-detail/events/virtuelle-mathe-weihnachtsfeier.html zu finden. Schaut vorbei!

Information from the Fachschaft: This year's Math Christmas party will take place at Thursday, the 17.12. starting 18 ct. online via zoom. All current information can be found on https://fsmath.uni-bonn.de/events-detail/events/virtual-christmas-party.html. Swing by!

Handzettel

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen: Schwache convergenz von Verteilungsfuktionen und von W-Maße, Konvergenz in Verteilung von Z.V., Konvergenz in W-keit von Z.V. Konvergenz in L^P, Fast sichere Konvergenz, Borel–Cantelli Lemmata.

Heutigen Vorlesung: Momenten

6 Das Gesetz der großen Zahlen

(Kapitel 6 in Bovier Skript)

Ziel dieses Kapitel ist das folgende wichtigste Verbindung zwischen Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit zu zeigen.

Satz. *(Starkes Gesetz der großen Zahlen). Sei $(X_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge i.i.d. Z.V. $X_n \in \mathscr{L}^1$. Dann*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \mathbb{E}[X_1], \quad f.s.$$

6.1 Momenten

Definition 1. *Sei X eine reelle Z.V. Der n-th Moment von X ist durch*

$$M_n := \mathbb{E}[X^n]$$

definiert, falls $|X|^n \in L^1$.

Satz 2. *Sei $(M_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge reelle Zahlen mit Eigenschaften*

a) $M_{2n} \geqslant 0$

b) $\exists c > 0$ *s.d.* $\sum_{n\geqslant 1} M_{2n} \frac{c^{2n}}{(2n)!} < \infty$.

Dann $\exists$ höchstens ein W-Maß $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ s.d.

$$M_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \mathrm{d}\mathbb{P}$$

für alle $n \geqslant 1$.

Definition 3. *Die Momenten erzeugende Funktion einer Z.V. X ist definiert durch*

$$\psi(z) := \mathbb{E}[e^{zX}], \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Lemma 4. *Sei X eine Z.V. Falls $\exists h > 0$ s.d. $\psi(\pm h) < \infty$ dann*

a) $\psi(z)$ *existiert für alle $|z| \leqslant h$.*

b) $\psi \in C^\infty$ *für $|z| < h$.*

c)

$$M_n = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \psi(z) \Big|_{z=0}$$

Einige momentenerzeugende Funktionen

$\mathbb{P}_X$	$\psi(z) = \mathbb{E}[e^{zX}]$
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$e^{\sigma^2 z^2/2 + mz}, \quad z \in \mathbb{R}$
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\frac{1}{1 - z/\lambda}, \quad \lvert z\rvert < \lambda$
$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$\exp(-\lambda(e^z - 1)), \quad z \in \mathbb{R}$
$\mathrm{Geo}(q)$	$\frac{1-q}{1-qe^z}, \quad \lvert z\rvert < \log(1/q)$
$\mathrm{Bin}(n, p)$	$(1 - p + pe^z)^n, \quad z \in \mathbb{R}$
$\mathrm{Cauchy}(a)$	$\begin{cases} +\infty, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$

6.2 Ungleichungen

Lemma 5. *(Tchebichev Ungleichung) Sei X eine reelle Z.V. mit Verteilung $\mathbb{P}$. Dann $\forall a > 0$,*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

Lemma 6. *(Markov Ungleichung) Sei X eine reelle Z.V. mit Verteilung $\mathbb{P}$. Dann, für alle $a > 0$, $p > 0$*

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{a^p}$$

Lemma 7. *Sei X eine reelle Z.V. mit Verteilung $\mathbb{P}$, $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ monoton wachsend. Dann für alle $a \in \mathbb{R}$:*

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(a)}.$$

Folgerung 8. *Sei X eine reelle Z.V.. Dann*

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \inf_{\lambda \geqslant 0} [e^{-\lambda a} \mathbb{E}[e^{\lambda X}]]$$

Folgerung 9. *Sei $(X_n)_{n \geqslant 1}$ eine Folge i.i.d. Z.V.. Dann*

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \geqslant a\right) \leqslant \inf_{\lambda \geqslant 0} [e^{-\lambda n a} (\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}])^n]$$
