Vorlesung 16 | 18.12.2020 | 14:15–16:00 via Zoom

Handzettel

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen: Momenten, Momenten erzeugenden Funktionen, Tchebichev und Markov Ungleichungen.

6 Das Gesetz der großen Zahlen (fortsetzung)

(Kapitel 6 in Bovier Skript)

6.2 Ungleichungen (fortsetzung)

Folgerung 10. *Sei* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *eine Folge i.i.d. Z.V.. Dann*

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \geqslant a\right) \leqslant \inf_{\lambda\geqslant 0} [e^{-\lambda n a}(\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}])^n]$$

6.3 Das schwache Gesetz der großen Zahlen

Axiom. $\exists (c_n)_{n\geqslant 1}$, $c_n \in \mathbb{R}_+$ *mit* $\sum_{n\geqslant 0} c_n < \infty$ *und*

$$\mathrm{Cov}(X_n, X_\ell) = \mathbb{E}[X_n X_\ell] - \mathbb{E}[X_n]\mathbb{E}[X_\ell] \leqslant c_{|k-\ell|}, \qquad k, \ell \geqslant 1.$$

Fall A1) Kovarianzen exponentiell abfallen:

$$|\mathrm{Cov}(X_n, X_\ell)| \leqslant c\,\alpha^{|n-\ell|}$$

für einen $\alpha \in (0,1)$, $c \in \mathbb{R}_+$.

Fall A2) $X_1, X_2, \ldots$ *unkorreliert und beschränken Varianzen: d.h.*

$$\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell) = 0, \quad k, \ell \geqslant 1$$

$$v = \sup_{k\geqslant 1} \mathrm{Var}(X_k) < \infty$$

Annhame (A) erffült mit $c_0 = v$, $c_n = 0$, $n \geqslant 1$.

Sei

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Satz 11. *(Schwaches Gesetz der großer Zahlen und* L^2*-Version) Under der Voraussetzung (A), für alle* $n \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$, *gilt:*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2 n}$$

und

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n}-\frac{\mathbb{E}[S_n]}{n}\right)\right]\leqslant\frac{C}{n}$$

für $C=c_0+2\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}c_n<\infty$.
Falls dazu $\mu=\mathbb{E}[X_k]$, $k\geqslant 1$ *dann*

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\mu\quad\text{in } L^2 \text{ und in W-keit.}$$

Lemma 12. *Seien* $X_1,\ldots,X_n$ *reelle Z.V. und* $S_n=X_1+\cdots+X_n$. *Dann*

$$\operatorname{Var}(S_n)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Var}(X_k)+2\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n}\operatorname{Cov}(X_k,X_\ell).$$

Satz 13. *Unter der Voraussetzung (A) folgt*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}-\frac{\mathbb{E}[S_n]}{n}=0,\qquad \mathbb{P}-f.s.$$

Falls $\mu=\mathbb{E}[X_k]$, $k\geqslant 1$ *dann* $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\mu$ *f.s.*

Satz 14. *Sei* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *stetig. Dann für alle* $\varepsilon>0$, $\exists n(\varepsilon)\geqslant 1$, *polynomials* B_n, *grad n s.d.*

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-B_n(x)|<\varepsilon.$$

6.4 Kolmogorov'sche Ungleichung

Lemma 15. *Seien* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *unabhängige Z.V. mit* $\mu_k=\mathbb{E}[X_k]$, $\sigma_k^2=\operatorname{Var}(X_k)$. *Setze*

$$S_n:=\sum_{k=1}^{n}X_k,\quad m_n:=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k]=\mathbb{E}[S_n]$$

und

$$s_n^2:=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2=\operatorname{Var}(S_n).$$

Dann, für alle $t>0$:

$$\mathbb{P}(\exists k\leqslant n \text{ s.d. } |S_k-m_k|\geqslant t s_k)\leqslant t^{-2}.$$