Vorlesung 17 | 22.12.2020 | 14:15–16:00 via Zoom

Handzettel

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen: Momenten, Momenten erzeugenden Funktionen, Tchebichev und Markov Ungleichungen, Das schwache Gesetz der großen Zahlen, Kolmogorov'sche Ungleichung.

6 Das Gesetz der großen Zahlen (Fortsetzung und Ende)

(Kapitel 6 in Bovier Skript)

6.5 Kolmogorov'sche Ungleichung

Lemma 15. *Seien* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *unabhängige Z.V. mit* $\mu_k=\mathbb{E}[X_k]$, $\sigma_k^2=\mathrm{Var}(X_k)$. *Setze*

$$S_n := \sum_{k=1}^n X_k, \quad m_n := \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}[S_n]$$

und

$$\mathfrak{s}_n^2 := \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 = \mathrm{Var}(S_n).$$

Dann, für alle $t>0$*:*

$$\mathbb{P}\left(\exists k\leqslant n \text{ s.d. } |S_k-m_k|\geqslant t\,\mathfrak{s}_n\right)\leqslant t^{-2}.$$

6.6 Das starkes GGZ

Satz 1. *(Starkes Gesetz der großen Zahlen). Sei* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *eine Folge i.i.d. Z.V.* $X_n\in\mathscr{L}^1$. *Dann*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k = \mathbb{E}[X_1], \quad f.s.$$

Lemma 16. *Seien* $(X_k)_{k\geqslant 1}$ *unabhängige Z.V. mit* $\mathrm{Var}(X_k)=\sigma_k^2$, $\mathbb{E}[X_k]=\mu_k$. *Falls*

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{\sigma_k^2}{k^2}<\infty$$

dann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k-\mu_k)\to 0 \quad f.s.$$

6.7 Große Abweichungen von GGZ

Satz 17. *Für alle $n \geqslant 1$, $a \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} (a)\ \ & \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant e^{-nI(a)}, \qquad \text{für } a \geqslant m \\ (b)\ \ & \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leqslant a\right) \leqslant e^{-nI(a)}, \qquad \text{für } a \leqslant m \end{aligned}$$

wobei die exponentielle Abfallrate $I(a)$ ist gegeben durch

$$I(a) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [at - \log \psi(t)]$$

Proposition 18. *(Jensen's Ungleichung) Sei X eine reelle Z.V., integrierbar, und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann*

$$f(\mathbb{E}[X]) \leqslant \mathbb{E}(f(X)).$$

Eigenschaften von $I(a)$.

a) I ist convex.

b) $I(a) \geqslant 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$

c) Falls $\psi(\lambda) < \infty$ auf $(-\delta, \delta)$ $\delta > 0$, dann

$$f_a(\lambda) = a\lambda - \log\psi(\lambda) \in C^\infty((-\delta, \delta))$$

mit $f_a(0) = 0$, $f_a'(0) = a - m$

$$\Rightarrow I(a) > 0, \qquad a \neq m.$$