

Handzettel

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen: Momenten, Momenten erzeugenden Funktionen, Tchebichev und Markov Ungleichungen, Kolmogorov'sche Ungleichung, die schwache und starke Gesetze großer Zahlen. Wir beenden das Kapitel und beginnen ein neues Kapitel über den zentralen Grenzwertsatz mit einer Diskussion über charakteristische Funktionen.

6 Das Gesetz der großen Zahlen (Ende)

(Kapitel 6 in Bovier Skript)

6.6 Große Abweichungen von GGZ

Satz 15. Für alle $n \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$

$$(a) \quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq e^{-nI(a)}, \quad \text{für } a \geq m$$
$$(b) \quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-nI(a)}, \quad \text{für } a \leq m$$

wobei die exponentielle Abfallrate $I(a)$ ist gegeben durch

$$I(a) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [at - \log \psi(t)]$$

Proposition 16. (Jensen's Ungleichung) Sei X eine reelle Z.V., integrierbar, und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

Eigenschaften von $I(a)$.

- a) I ist convex.
- b) $I(a) \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$
- c) Falls $\psi(\lambda) < \infty$ auf $(-\delta, \delta)$ $\delta > 0$, dann

$$f_a(\lambda) = a\lambda - \log \psi(\lambda) \in C^\infty((-\delta, \delta))$$

$$\text{mit } f_a(0) = 0, f'_a(0) = a - m$$

$$\Rightarrow I(a) > 0, \quad a \neq m.$$

7 Der zentrale Grenzwertsatz

(Kapitel 7 in Bovier Skript)

Definition 1. Sei X eine reelle Z.V.. Dann die charakteristische Funktion von X definiert durch

$$\phi(t) = \phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i \mathbb{E}[\sin(tX)].$$

Einige Eigenschaften

Lemma 2. ϕ_X ist (immer) wohldefiniert mit

a) $\phi_X(0) = 1$

b) $|\phi_X(t)| \leq 1$

c)

$$\operatorname{Im}(\phi_X(t)) = \frac{\phi(t) - \phi(-t)}{2i}, \quad \operatorname{Re}(\phi_X(t)) = \frac{\phi(t) + \phi(-t)}{2}$$

d) Falls X hat eine symmetrische Verteilung dann $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$.

Lemma 3. Jede charakteristische Funktion ϕ eines W-maß ist gleichmässig stetig auf \mathbb{R}

Proposition 4. Sei ϕ die char. Fkt. einer Z.V. X mit $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$. Dann $\phi \in C^n(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ mit

$$\phi(0) = 1, \quad \phi^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n}{dt^n} \phi(t) \right|_{t=0} = i^n \mathbb{E}[X^n].$$

Lemma 5.

a) Seien X_1, X_2, \dots unabhängige Z.V. mit char. Fkt. ϕ_{X_k} . Seien $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Dann

$$\phi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(t).$$

b)

$$\phi_{aX+b}(t) = e^{itb} \phi(at).$$

c) Insbesondere, falls $\mathbb{E}[X_k] = \mu$ für $k \geq 1$, dann

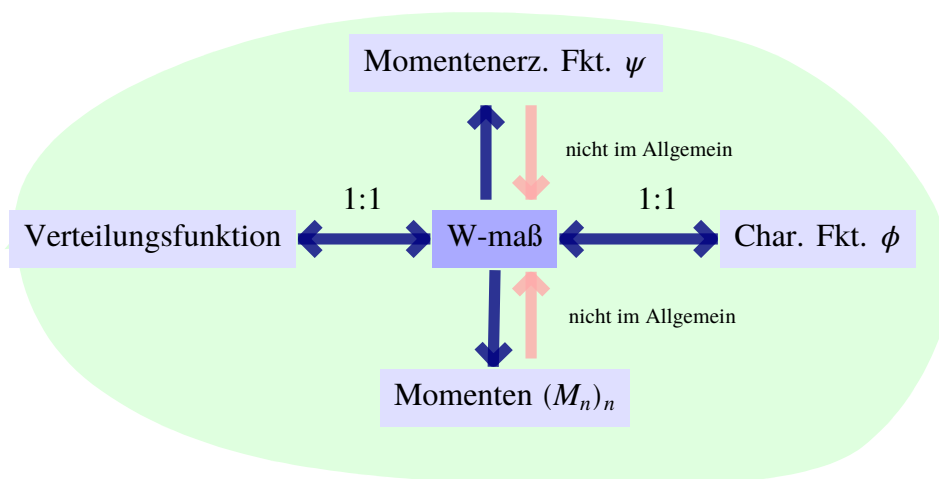
$$\phi_{\frac{S_k - \mu n}{n^\gamma}}(t) = e^{-it\mu n^{1-\gamma}} \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(n^{-\gamma}t).$$

Charakteristische Funktionen einiger Verteilungen

\mathbb{P}_X	$\phi^X(t)$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
Ber(p)	$(1-p + pe^{it})$
Bin(n, p)	$(1-p + pe^{it})^n$
Poi(λ)	$e^{-\lambda(e^{it}-1)}$
Exp(λ)	$(1-it/\lambda)^{-1}$
Geo(q)	$\frac{1-q}{1-qe^{it}}$
Cauchy(a)	$e^{-a t }$

nicht Ableitbar in 0

Satz 6. Die charakteristische Funktion einer Z.V. legt deren Verteilung eindeutig fest.



Lemma 7. Sei $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Dann

$$\phi_X(t) = \exp(-t^2 \sigma^2 / 2).$$