Vorlesung 19 | 15.1.2021 | 10:15–12:00 via Zoom

Handzettel

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen: Momenten, Momenten erzeugenden Funktionen, Tchebichev und Markov Ungleichungen, Kolmogorov'sche Ungleichung, die schwache und starke Gesetze großer Zahlen. Wir beenden das Kapitel und beginnen ein neues Kapitel über den zentralen Grenzwertsatz mit einer Diskussion über charakteristische Funktionen.

7 Der zentrale Grenzwertsatz

(Kapitel 7 in Bovier Skript)

Definition 1. *Sei X eine reelle Z.V.. Dann die charakteristische Funktion von X definiert durch*

$$\phi(t) = \phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\,\mathbb{E}[\sin(tX)].$$

Einige Eigenschaften

Lemma 2. *ϕ_X ist (immer) wohldefiniert mit*

a) $\phi_X(0) = 1$

b) $|\phi_X(t)| \leqslant 1$

c)
$$\operatorname{Im}(\phi_X(t)) = \frac{\phi(t) - \phi(-t)}{2i}, \qquad \operatorname{Re}(\phi_X(t)) = \frac{\phi(t) + \phi(-t)}{2}$$

d) Falls X hat eine symmetrische Verteilung dann $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$.

Lemma 3. *Jede charakteristische Funktion ϕ eines W-maß ist gleichmässig stetig auf $\mathbb{R}$*

Proposition 4. *Sei ϕ die char. Fkt. einer Z.V. X mit $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$. Dann $\phi \in C^n(\mathbb{R};\mathbb{C})$ mit*

$$\phi(0) = 1, \qquad \phi^{(n)}(0) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\phi(t)\Big|_{t=0} = i^n \mathbb{E}[X^n].$$

Lemma 5.

a) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Z.V. mit char. Fkt. ϕ_{X_k}. Seien $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Dann

$$\phi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(t).$$

b)

$$\phi_{aX+b}(t) = e^{itb}\phi(at).$$

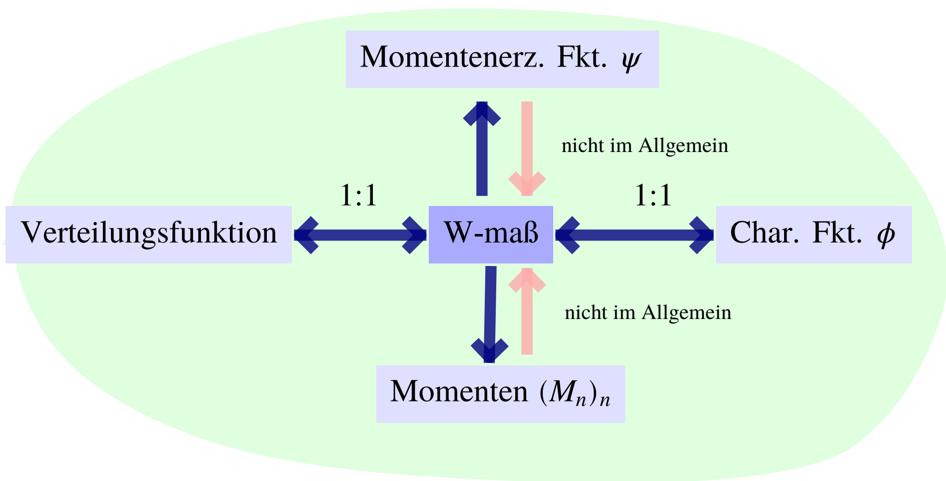
c) Insbesonderes, falls $\mathbb{E}[X_k] = \mu$ *für* $k \geqslant 1$*, dann*

$$\phi_{\frac{S_k - \mu n}{n^\gamma}}(t) = e^{-it\mu n^{1-\gamma}} \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k}(n^{-\gamma} t).$$

Charakteristische Funktionen einiger Verteilungen

$\mathbb{P}_X$	$\phi^X(t)$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
$\mathrm{Ber}(p)$	$(1-p+pe^{it})$
$\mathrm{Bin}(n,p)$	$(1-p+pe^{it})^n$
$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$e^{-\lambda(e^{it}-1)}$
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$(1-it/\lambda)^{-1}$
$\mathrm{Geo}(q)$	$\dfrac{1-q}{1-qe^{it}}$
$\mathrm{Cauchy}(a)$	$e^{-a\lvert t\rvert}$ ← nicht Ableitbar in 0

Satz 6. *Die charakteristische Funktion einer Z.V. legt deren Verteilung eindeutig fast.*



Lemma 7. *Sei* $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$*. Dann*

$$\phi_X(t) = \exp(-t^2\sigma^2/2).$$

Satz 8. *Sei ϕ die char. Fkt. einer Z.V. X mit Verteilung μ.*

a) Dann $\forall\ a<b$:

$$\mu((a,b))+\frac{1}{2}\mu(\{a,b\})=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\mathrm{d}t.$$

b) Falls $\int|\phi(t)|\mathrm{d}t<\infty$ dann μ ist absolut stetig bzlg. Lebesge mit stetiger Dichte

$$\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-itx}\phi(t)\mathrm{d}t.$$

Beispiel. Seien $X\sim\mathcal{N}(0,1)$ und $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$ unabhängige Z.V.. Dann

$$Z=X^2+Y^2\sim\mathrm{Exp}(1).$$

Zwei methoden zu dass zeigen. Diese Beobachtung liefert eine sehr gute Methode zur Erzeugung einer Gaußschen Zufallsvariablen.
