Vorlesung 20 | 19.1.2021 | 14:15–16:00 via Zoom

Handzettel

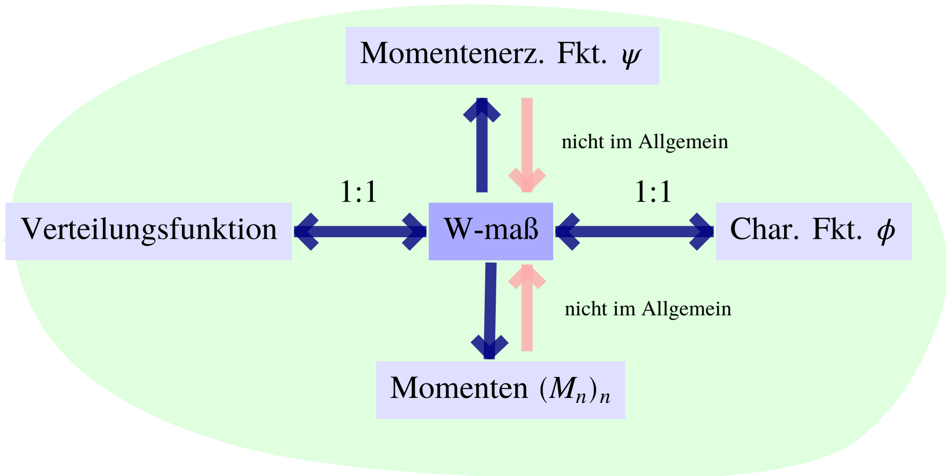
7 Der zentrale Grenzwertsatz (Fortsetzung)

(Kapitel 7 in Bovier Skript)

Definition 1. *Sei X eine reelle Z.V.. Dann die charakteristische Funktion von X definiert durch*

$$\phi(t) = \phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\,\mathbb{E}[\sin(tX)].$$

Satz 6. *Die charakteristiche Funktion einer Z.V. legt deren Verteilung eindeutig fast.*



Lemma 7. *Sei* $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. *Dann*

$$\phi_X(t) = \exp(-t^2\sigma^2/2).$$

Satz 8. *Sei* ϕ *die char. Fkt. einer Z.V. X mit Verteilung* μ.

a) *Dann* $\forall\, a < b$:

$$\mu((a,b)) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\}) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\phi(t)\mathrm{d}t.$$

b) *Falls* $\int|\phi(t)|\mathrm{d}t<\infty$ *dann* μ *ist absolut stetig bzlg. Lebesge mit stetiger Dichte*

$$\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-itx}\phi(t)\mathrm{d}t.$$

Beispiel. Seien $X\sim\mathcal{N}(0,1)$ und $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$ unabhängige Z.V.. Dann

$$Z=X^2+Y^2\sim\mathrm{Exp}(1).$$

Zwei methoden zu dass zeigen. Diese Beobachtung liefert eine sehr gute Methode zur Erzeugung einer Gaußschen Zufallsvariablen.

Lemma 9. *(Box–Müller Methode) Sei* Z,Θ *unab. und s.d.*

$$Z\sim\mathrm{Exp}(1/2),\qquad\Theta\sim\mathcal{U}([0,2\pi]).$$

Setzen

$$X=Z^{1/2}\sin(\Theta),\qquad Y=Z^{1/2}\cos(\Theta)$$

Dann X,Y *unab. sind und* $X\sim Y\sim\mathcal{N}(0,1)$.

Satz 10. *(Transformationssatz)*

a) *Eindimensionale: Sei* $X\colon\Omega\to D\subseteq\mathbb{R}$ *ein Z.V. mit absolut Stetiger Verteilung,* ρ_X *die Dichte. Sei* $\phi\colon D\to\mathbb{R}$ *stetig differentierbar mit* $\phi'(x)\neq 0$ $\forall x\in D$. *Dann* $\phi(X)$ *hat Dichte*

$$\rho_{\phi(X)}(y)=\rho_X(\phi^{-1}(y))\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\phi^{-1}(y)\right|\mathbb{1}_{y\in\phi(D)}$$

b) *Mehrdimensionale: Seien* $S,T\subseteq\mathbb{R}^n$, $X\colon\Omega\to S$ *eine Z.V. mit absolut stetiger Verteilung* μ_X *mit Dichte* ρ_X. *Sei* $\psi\colon S\to T$ *ein Diffeomorphismus* C^1 *mit* $\det\mathrm{D}\psi(x)\neq 0$, $\forall x\in S$. *Dann ist die Verteilung von* $\psi(X)$ *absolut stetig (bzgl. Lebesgue) mit Dichte*

$$\rho_{\psi(X)}(y)=\rho_X(\psi^{-1}(y))|\det(D\psi^{-1}(y))|\mathbb{1}_{y\in\psi(D)}$$

wobei

$$\det(D\psi^{-1}(y))=\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_{i,j},\qquad x=\psi^{-1}(y).$$

Satz 11. *Seien* $X_1,X_2,\ldots$ *Z.V. mit char. Fkt.* $\phi_1,\phi_2,\ldots$ *Falls*

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(t)=\phi(t),\qquad\forall t\in\mathbb{R},$$

wobei ϕ *die char. Fkt. einer Z.V.* X *ist, dann* $\lim_{n\to\infty}X_n\overset{\mathcal{D}}{=\!=}X$.

Lemma 12. *Sei $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ mit $\phi(0) = 1$, $\phi'(0) = 0$. Dann*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\phi\left(\frac{t}{n^{1/2}}\right)\right]^n = \exp\left(-\frac{1}{2}\phi''(0)t^2\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Satz 13. *(CLT) Seien $X_1, X_2, \ldots$ iid Z.V. mit $\mathbb{E}[X_k] = \mu$, $\mathrm{Var}(X_k) = \sigma^2 < \infty$. Dann konvergiert*

$$Z_n = \frac{1}{n^{1/2}\sigma}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu)$$

in Verteilung gegen eine $\mathcal{N}(0,1)$ Z.V., d.h. für $s \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{1}{n^{1/2}\sigma}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu) \leqslant s\right) = \int_{-\infty}^{s}\frac{e^{-x^2/2}}{(2\pi)}\mathrm{d}x.$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & F_X & \xleftrightarrow{1:1} & \mathbb{P}_X & \xleftrightarrow{1:1} & \phi_X \\
n \to \infty & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & F_{X_n} & \xleftrightarrow{1:1} & \mathbb{P}_{X_n} & \xleftrightarrow{1:1} & \phi_{X_n}
\end{array}$$