Vorlesung 21 | 22.1.2021 | 10:15–12:00 via Zoom

Handzettel

7 Der zentrale Grenzwertsatz (Fortsetzung)

(Kapitel 7 in Bovier Skript)

Satz 10. *(Transformationssatz)*

a) *Eindimensionale: Sei $X\colon \Omega \to D \subseteq \mathbb{R}$ ein Z.V. mit absolut Stetiger Verteilung, ρ_X die Dichte. Sei $\phi\colon D \to \mathbb{R}$ stetig differentierbar mit $\phi'(x) \neq 0$ $\forall x \in D$. Dann $\phi(X)$ hat Dichte*

$$\rho_{\phi(X)}(y) = \rho_X(\phi^{-1}(y))\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\phi^{-1}(y)\right|\mathbb{1}_{y\in\phi(D)}$$

b) *Mehrdimensionale: Seien $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$, $X\colon \Omega \to S$ eine Z.V. mit absolut stetiger Verteilung μ_X mit Dichte ρ_X. Sei $\psi\colon S \to T$ ein Diffeomorphismus C^1 mit $\det \mathrm{D}\psi(x) \neq 0$, $\forall x \in S$. Dann ist die Verteilung von $\psi(X)$ absolut stetig (bzgl. Lebesgue) mit Dichte*

$$\rho_{\psi(X)}(y) = \rho_X(\psi^{-1}(y))|\det(D\psi^{-1}(y))|\mathbb{1}_{y\in\psi(D)}$$

wobei

$$\det(D\psi^{-1}(y)) = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_{i,j}, \qquad x = \psi^{-1}(y).$$

Satz 11. *Seien $X_1, X_2, \ldots$ Z.V. mit char. Fkt. $\phi_1, \phi_2, \ldots$ Falls*

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(t) = \phi(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei ϕ die char. Fkt. einer Z.V. X ist, dann $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{\mathscr{D}}{=} X$.

Lemma 12. *Sei $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ mit $\phi(0) = 1$, $\phi'(0) = 0$. Dann*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\phi\left(\frac{t}{n^{1/2}}\right)\right]^n = \exp\left(-\frac{1}{2}\phi''(0)t^2\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Satz 13. *(CLT) Seien* $X_1, X_2, \dots$ *iid Z.V. mit* $\mathbb{E}[X_k] = \mu$, $\operatorname{Var}(X_k) = \sigma^2 < \infty$. *Dann konvergiert*

$$Z_n = \frac{1}{n^{1/2}\sigma} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)$$

in Verteilung gegen eine $\mathcal{N}(0,1)$ *Z.V., d.h. für* $s \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n^{1/2}\sigma} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu) \leqslant s \right) = \int_{-\infty}^{s} \frac{e^{-x^2/2}}{(2\pi)} \mathrm{d}x.$$

$$\begin{array}{cccccc} & F_X & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \mathbb{P}_X & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \phi_X \\ n \to \infty & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & F_{X_n} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \mathbb{P}_{X_n} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \phi_{X_n} \end{array}$$

Satz 14. *(Levy-Lindenberg CLT) Seien* $X_1, X_2, \dots$ *unabhängige Z.V. mit* $\mathbb{E}(X_k) = 0$, $\operatorname{Var}(X_k) = \sigma_k^2 < \infty$. *Setze* $v_n = \operatorname{Var}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$. *Falls* $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{1}{v_n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(|X_k| \geqslant \varepsilon v_k^{1/2} \right) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

dann

a)

$$\frac{1}{v_n} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sigma_k^2 \longrightarrow 0 \quad \text{als } n \to \infty,$$

b)

$$\frac{1}{v_n^{1/2}} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$$

Lemma 15. *Seien* $\alpha \in (1,2)$, $R \in (0,\infty)$. *Seien* $X_1, X_2, \dots$ *iid Z.V. mit absolut stetigen Verteilungen und Dichtefunktionen*

$$\rho(x) = C \frac{1_{|x| \geqslant R}}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Dann $X_k \in \mathscr{L}^1$ *aber* $X_k \notin \mathscr{L}^2$.

$$\phi_{X_k}(t) = 1 + imt - c|t|^\alpha + O(t^2)$$

für $t \to 0$, *mit* $m = \mathbb{E}[X_k]$ *und*

$$c = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(u)}{|u|^{\alpha+1}} \mathrm{d}u \in (0,\infty).$$

Folgerung 16. *Seien* $X_1, X_2, \dots$ *i.i.d Z.V. wie in Lemma 15. Dann,*

$$n^{-1/\alpha} \tilde{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mu_{0,\alpha}$$

wobei $\mu_{c,\alpha}$ *ist die Verteilung mit char Fkt*

$$\phi_{c,\alpha}(t) = \exp(-c\,|t|^{\alpha}).$$

Definition 17. *Seien* $\alpha \in (0,2]$, $m \in \mathbb{R}$, *Die W-maße mit char. Fkt.*

$$\phi(t) = e^{imt - c|t|^{\alpha}}$$

$c \in (0,\infty)$ *heißen symmetrische* α*-stabile Verteilungen mit Mittelwert m.*