Vorlesung 9 | 24.11.2020 | 14:15–16:00 via Zoom

Handzettel

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen: Beschränkung eines σ-Algebra, Bedingte W-keiten, Bayes'sche Formel, Unabhängigkeit, von Z.V. erzeugten σ-Algebren, Produkt σ-Algebra.

Definition 1. *Zwei Ereignisse $A, B \in \mathscr{F}$ heißen unabhängig, falls*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Allgemeiner, heißen n Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig, falls $\forall m \leqslant n$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_m \leqslant n$,

$$\mathbb{P}(\cap_{k=1}^m A_{i_k}) = \Pi_{k=1}^m \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Definition 2.

- $$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) | \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$$

  heißt das Produktraum von Ω_1 und Ω_2.

- *$\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$ ist die kleinste σ-Algebra, die alle Menge der Form $C = A \times B$, $A \in \mathscr{F}_1$, $B \in \mathscr{F}_2$ enthält. $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$ heißt die Produkt σ-Algebra von $\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$.*

Lemma 3. *Es gilt*

a) $\forall C \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$, $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$ *dann,* $C_x \in \mathscr{F}_2$, $C^y \in \mathscr{F}_1$

b) $\forall f: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ *messbar dann,* $\forall x \in \Omega_1, y \in \Omega_2$ $f_x: (\Omega_2, \mathscr{F}_2) \to \mathbb{R}$, $f^y: (\Omega_1, \mathscr{F}_1) \to \mathbb{R}$ *messbar sind.*

Heutigen Vorlesung.

Satz 4. *Seien $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ W-masse auf $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$*

a) $\exists!\ \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$ *W-masse auf* $(\Omega, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2)$ *s.d.*

$$(\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2)(A \times B) = \mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_2(B) \qquad \forall A \in \mathscr{F}_1, B \in \mathscr{F}_2.$$

b) *Falls* $C \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$, *dann*

$$\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2(C) = \int_{\Omega_1} \mathbb{P}_2(C_x) \mathrm{d}\mathbb{P}_1(x) = \int_{\Omega_2} \mathbb{P}_1(C^y) \mathrm{d}\mathbb{P}_2(y).$$

Satz 5. *(Fubini–Tonelli) Seien $(\Omega_k, \mathscr{F}_k, \mathbb{P}_k)_{k=1,2}$ zwei W-räume, $f \geqslant 0$ eine reelle messbare Funkion auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2)$. Dann ist*

$$h: x \in \Omega_1 \mapsto h(x) := \int_{\Omega_2} f(x, y) \mathrm{d}\mathbb{P}_2(y), \qquad \mathscr{F}_2\text{-messbar}.$$

$$h: y \in \Omega_2 \mapsto g(y) := \int_{\Omega_1} f(x, y) \mathrm{d}\mathbb{P}_1(x), \qquad \mathscr{F}_1\text{-messbar}.$$

Dazu,

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f \mathrm{d}(\mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2) = \int_{\Omega_1} h \mathrm{d}\mathbb{P}_1 = \int_{\Omega_2} g \mathrm{d}\mathbb{P}_2.$$

Satz 6. *Sei $f\colon(\Omega_1\times\Omega_2, \mathscr{F}_1\otimes\mathscr{F}_2)\to(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ absolut integrierbar bzgl. $\mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2$. Dann*

a) *$f(x,y)$ ist $L^1(\Omega_2,\mathscr{F}_2,\mathbb{P}_2)$ für $\mathbb{P}_1$-fast alle $x\in\Omega_1$, (und umgekehrt)*

b) *$h(x)=\int_{\Omega_2} f(x,y)\mathrm{d}\mathbb{P}_2(y)$ wohldefiniert bis auf $\mathbb{P}_2$-Nullmengen und $h\in L^1(\Omega_1,\mathscr{F}_1,\mathbb{P}_1)$,*
$g(y)=\int_{\Omega_1} f(x,y)\mathrm{d}\mathbb{P}_1(x)$ wohldefiniert bis auf $\mathbb{P}_1$-Nullmengen und $g\in L^1(\Omega_2,\mathscr{F}_2,\mathbb{P}_2)$,

c)

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f \mathrm{d}(\mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2) = \int_{\Omega_1} h \mathrm{d}\mathbb{P}_1 = \int_{\Omega_2} g \mathrm{d}\mathbb{P}_2.$$

Unendliche Produkte

Definition 7. *Seien $(\Omega_k,\mathscr{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Messräume und $\hat{\Omega}=\prod_{k\geqslant 1}\Omega_k$ das unendliche Produkträum (geordnete Produkt).*

Definieren wir die Produkt-σ-Algebra $\hat{\mathscr{F}}$ auf $\hat{\Omega}$, als die kleinste σ-Algebra, die alle Teilmengen von $\hat{\Omega}$ der Form $A=\otimes_{k\in I}A_k\times\otimes_{\ell\notin I}\Omega_\ell$ enthält, wobei $A_k\in\mathscr{F}_k$, $I=(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n$. Diese Mengen heißen Zylindermengen.

Definition 8. *Seien $(\Omega_k,\mathscr{F}_k,\mathbb{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ W-raüme. Wir definieren das unendliche Produktmaß $\hat{\mathbb{P}}\coloneqq\otimes_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}_k$ auf $(\hat{\Omega},\hat{\mathscr{F}})$ s.d. für alle Zylindermengen A gilt*

$$\hat{\mathbb{P}}(A)=\hat{\mathbb{P}}(\otimes_{k\in I}A_k\times\otimes_{\ell\notin I}\Omega_\ell)=\prod_{k\in I}\mathbb{P}_k(A_k).$$

Definition 9. *Sei $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ ein W-raum. Eine messbare Abbildung*

$$X\colon(\Omega,\mathscr{F})\to(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$$

heißt Zufallsfolge, oder stochasticher Prozess in diskreter Zeit.