Vorlesung 12 | 4.12.2020 | 14:15–16:00 via Zoom

(Ein Handzettel für heutige Vorlesung finden Sie auf der Seite der Vorlesung auf meiner Website, siehe Tagebuch)

Webpage für die Vorlesung (URL)

Information der Fachschaft: Dieses Jahr findet die Mathe-Weihnachtsfeier am Donnerstag, 17.12, ab 18 ct. online via Zoom statt. Alle aktuellen Informationen sind auf https://fsmath.uni-bonn.de/veranstaltungen-detail/events/virtuelle-mathe-weihnachtsfeier.html zu finden. Schaut vorbei!

Information from the Fachschaft: This year's Math Christmas party will take place at Thursday, the 17.12. starting 18 ct. online via zoom. All current information can be found on https://fsmath.uni-bonn.de/events-detail/events/virtual-christmas-party.html. Swing by!

Prüfungs (in Präsenz): **9/2**, 13/3

Spickzettel ist **nicht** erlaubt. Die Prüfung enthält einige theoretische Fragen zu Aussagen von Theoremen oder Definitionen und Eigenschaften von Zufallsvariablen. Wir werden Ihnen später eine Liste der wichtigsten Konzepte geben, dies wird natürlich nicht exaustiv sein.

Frage: Müss Ich, Dichte und den Erwartungswert der Exponentialverteilung „auswendig lernen“?....

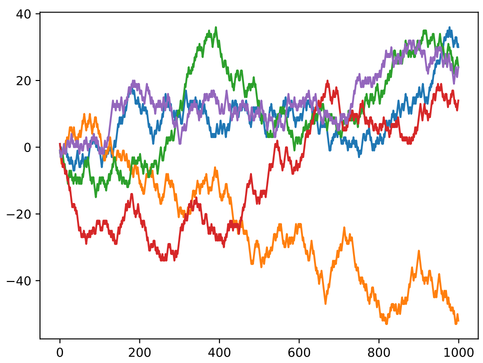
4 Summe unabhängiger Z.V. (Folgerung)

(Kapitel 3 und 4 in Bovier Skript)

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen: unendliche Produkten, Summe unabhängiger Z.V., Faltungen, stabilität gegen Faltungen, die Irrfahrt, das Ruinproblem, das Arcsinusgesetz, Reflektionprinzip.

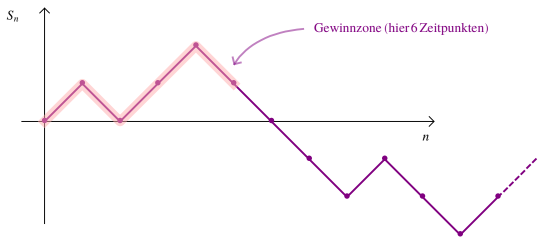
Heutige Vorlesung: das Arcsinusgesetz (folgerung und Ende), Konvergenzbegriffe.

Das Arcsinusgesetz



Frage:

Wie viel Zeit verbringt es in der Gewinnzone?



Satz 1. *Sei $(S_n)_n$ die symmetrische einfache Irrfahr, $u_{2n} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ und*

$$Z_{2n} := \sharp \textit{schritten in positiven Bereich} = \sum_{\ell=1}^{2n} \mathbb{1}_{S_\ell > 0 \vee S_{\ell+1} > 0}.$$

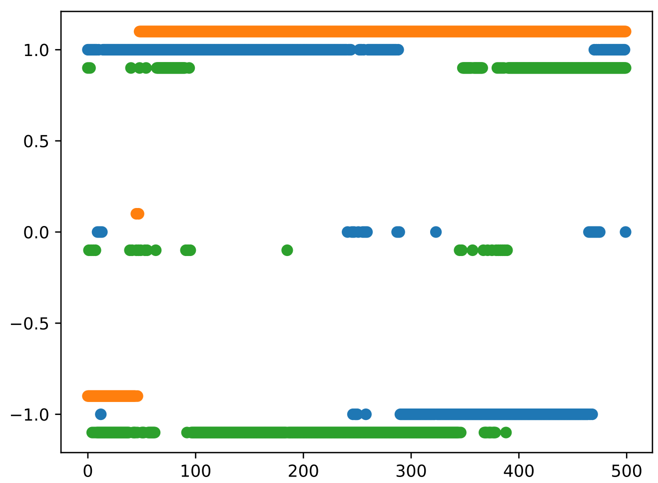
Dann, gilt es

$$\mathbb{P}(Z_{2n}=2k) =: p_{2k,2n} = u_{2k}\cdot u_{2n-2k} = \binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{2^{2(n-k)}}$$

Wir wollen die Limes $n\to\infty$ nehmen und die Asymptotischer Verteilung von Z_{2n} berechnen.

```
>>> # 1d random walk.
    import random # to access the random number generator
    import numpy as np # functions for numerical computations
    import matplotlib.pyplot as plt # plotting library

    # probability to move up or down
    prob = [0.5, 0.5]
>>> t_max = 500 # maximum time to simulate
    t = np.arange(t_max) # creates the vector 0,1,2,3,...,t_max-1
    # steps can be -1 or 1 (note that randint excludes the upper limit)
    steps = 2 * np.random.randint(0, 1 + 1, t_max) - 1
    # the time evolution of the position is obtained by successively
    # summing up individual steps.
    positions = np.cumsum(steps)
    # now we compute the sign
    signs = np.sign(positions)
    # plotting down the graph of the random walk
    #plt.clf() # clear the plot
    plt.plot(t,-0.1+signs,'o')
    fig = plt.gcf() # generate an output file
    ps_out(fig) # ship the output to TeXmacs as a Postscript file
```




```
>>>
```

Asymptotischer Ergebnis

$$\mathbb{P}(Z_{2n}=2k) = \binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{2^{2(n-k)}}$$

Für $n\gg 1$, Stirling formel gibt

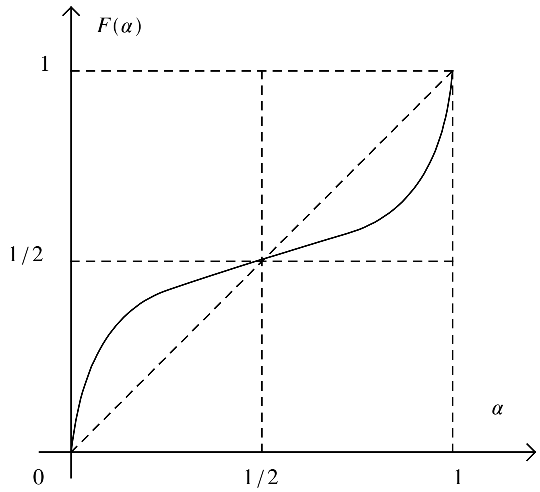
$$n! = (2\pi n)^{1/2} e^{n(\log n-1)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Sei $k = \lfloor \alpha n \rfloor$ mit $\alpha \in [1/2, 1)$.

$$p_{2k,2n} = \frac{1}{n} \frac{1}{\pi(\alpha(1-\alpha))^{1/2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad n \to \infty, \frac{k}{n} \to \alpha.$$

$$\sum_{n/2 \leqslant k \leqslant \alpha n} p_{2k,2n} \approx \frac{1}{\pi} \int_{1/2}^{\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{\pi(x(1-x))^{1/2}} = \frac{2}{\pi} \arcsin(\alpha^{1/2}) - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_{2n} \leqslant \alpha n) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\alpha^{1/2}) = F(\alpha)$$



Die Dichte

$$\rho(\alpha) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} F(\alpha) = \frac{1}{\pi(\alpha(1-\alpha))^{1/2}}$$

Es ist viel größer für $\alpha \approx 0$ oder $\alpha \approx 1$ als in der Mitte $\alpha \approx 1/2$.

5 Konvergenzbefriffe

Beispiel. Wir haben schon bemerkt, dass

$$\mathrm{Bin}\left(n, \frac{\rho}{n}\right)(k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{Poi}(\rho)(k)$$

für $k = 0, 1, \ldots$ und falls $X \sim \mathrm{Geo}(q)$, dann

$$\mathbb{P}((1-q)X \leqslant x) \xrightarrow[q\to 1]{} \mathbb{P}(\tilde{X} \leqslant x)$$

wobei $\tilde{X} \sim \mathrm{Exp}(1)$.

Beispiel. Sei

$$X_M \sim \left(1 - \frac{1}{M}\right)\delta_0 + \frac{1}{M}\delta_M.$$

Dann für alle $k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{M\to\infty} \mathbb{P}(X_M = k) = \mathbb{P}(X_\infty = k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

mit $X_\infty = 0$. Aber es gilt nicht:

$$\mathbb{E}[X_M] \not\xrightarrow[M\to\infty]{} \mathbb{E}[X_\infty] = 0 \qquad \text{mit } X_\infty \sim \delta_0$$

weil $\mathbb{E}[X_M] = 1$ für alle M.

$\Rightarrow$ Es gibt verschiedene Konvergenzbegriffe

Errinnerung: Verteilungsfuktion F_X auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ es ist in eins zu eins Korrespondenz mit Z.V. Verteilung $\mathbb{P}_X$, d.h. $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)$.

Beispiel. Ein anderes Beispiel: Betrachten die Folge von W-Maße $(\delta_{1/n})_n$. Naturlich möchten wir sagen, dass

$$\delta_{1/n} \to \delta_0,$$

d.h. die Folge gegen die W-Maß δ_0 konvergiert. Tatsächlich haben wir

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\delta_{1/n}(\mathrm{d}x) = g(1/n) \to g(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\delta_0(\mathrm{d}x)$$

für alle beschränken stetigen Funktionen g.

Aber, sei $F_n(x) = \delta_{1/n}\big((-\infty, x]\big) = \mathbb{1}_{x \geqslant 1/n}$ Verteilungsfunktionen von $\delta_{1/n}$ und $F(x) = \mathbb{1}_{x \geqslant 0}$ Verteilungsfunktion von δ_0. Dann

$$F_n(x) \to \mathbb{1}_{x>0} \neq F(x)$$

deshalbs wir können keine Konvergenz der Verteilungsfunktionen im Allgemeinen erwarten.

Bemerkung. Hier gibt es eine weitere Schwierigkeit, Maßtheorie und Topologie zusammenzustellen. Die Konvergenz $x_n \to x$ von Folgen von Punkten impliziert nicht die Konvergenz von folgen von Integrales für beliebige beschränke messbare (aber nicht stetige) Funktionen h gegen δ_{x_n}:

$$\int_\Omega h(\omega)\delta_{x_n}(\mathrm{d}\omega) \nrightarrow \int_\Omega h(\omega)\delta_x(\mathrm{d}\omega).$$

Wir brauchen ein „schwacher“ Konvergenzbefriffe von Verteilungsfunktionen.

5.1 Konvergenz von Verteilungsfunktionen

Definition 2. *Sei $(F_n)_{n \geqslant 1}$ eine Folge von Verteilungsfunktionen. Dann konvergiert F_n schwach gegen eine Verteilungsfunktion F, falls*

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ für welche F stetig ist.

Bemerkung. Die stetigkeit Annahme ist nötig, siehe oben. Auch, nehme

$$F_n(t) = 1 + \pi^{-1}\arctan(nx) \xrightarrow[n \to \infty]{} \tilde{F}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Aber $\tilde{F}(x)$ ist in $x = 0$ nicht rechtstetig! In dieser Fall,

$$F_n \xrightarrow[\text{schwach}]{} F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Analog für W-maße.

Definition 3. *Sei $(\mathbb{P}_n)_{n \geqslant 1}$ eine Folge von W-Maße auf $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$ mit Ω topologische Raum. Dann konvergiert $(\mathbb{P}_n)_n$ schwach gegen $\mathbb{P}$ falls für alle beschränkten stetigen Funktionen $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega g(\omega)\mathbb{P}_n(\mathrm{d}\omega) \to \int_\Omega g(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

Beispiel. Falls $x_n \to x \in \Omega$ dann $\delta_{x_n} \to \delta_x$ schwach.

Die Verbindung zwischen Def. 2 und Def. 3 ist das folgende Satz.

Satz 4. *Sei* $(\mathbb{P}_n)_n$ *eine Folge W-maße auf* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ *und* $F_n(x) := \mathbb{P}_n((-\infty, x])$. *Dann konvergiert* $(\mathbb{P}_n)_n$ *schwach gegen ein W-maß* $\mathbb{P}$ *mit Verteilungsfunktion* $F(x) := \mathbb{P}_n((-\infty, x])$ *dann und nur dann, wenn*

$$F_n \xrightarrow[\text{schwach}]{} F.$$

Beweis. **(⇒)** Z.z. $\mathbb{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}$ schwach $\Rightarrow F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ für alle x wo F stetig ist.

Sei $\forall \varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $g_\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.d.

$$\mathbb{1}_{x \leqslant c} \leqslant g_\varepsilon(x) \leqslant \mathbb{1}_{x \leqslant c+\varepsilon}$$

Dann

$$F_n(c) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x\leqslant c} \mathbb{P}_n(\mathrm{d}x) \underbrace{\leqslant}_{\text{Monotonie}} \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x) \mathbb{P}_n(\mathrm{d}x) \xrightarrow[\mathbb{P}_n \to \mathbb{P}\,\text{schwach}]{} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{g_\varepsilon(x)}_{\leqslant \mathbb{1}_{x\leqslant c+\varepsilon}} \mathbb{P}(\mathrm{d}x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{g_\varepsilon(x)}_{\leqslant \mathbb{1}_{x\leqslant c+\varepsilon}} \mathbb{P}(\mathrm{d}x) \underbrace{\leqslant}_{\text{Monotonie}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x\leqslant c+\varepsilon} \mathbb{P}(\mathrm{d}x) = F(c+\varepsilon)$$

Das bedeutet, dass

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(c) \leqslant F(c+\varepsilon).$$

Ähnlich erhalten wir

$$\liminf_{n\to\infty} F_n(c) \geqslant F(c-\varepsilon).$$

Falls aber F in c stetig ist, dann mit $\varepsilon \to 0$ wir haben

$$F(c) = \lim_{\varepsilon\to 0} F(c-\varepsilon) \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} F_n(c) \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} F_n(c) \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} F(c+\varepsilon) = F(c).$$

Dann $F_n(c) \to F(c)$ für alle c Stetigkeitstellen für F.

(⇐) Z.z. $F_n(c) \to F(c)$, c stetigkeitspunkt von $F \Rightarrow \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}$ schwach.

Für jedes $\varepsilon > 0$, existiert $a < b$ s.d. $F(a) \leqslant \varepsilon$ und $F(b) \geqslant 1-\varepsilon$, weil $F(a) \to 0$ für $a \to -\infty$ und $F(b) \to 1$ für $b \to +\infty$.

Erinnerung: Verteilungfunktionen haben höchstens abzählbar viele Unstetikeitstellen. Dann, wir können a, b stetigkeitsstellen von F wählen. (Übung)

Da $F_n(a) \to F(a)$ und $F_n(b) \to F(b)$ als $n \to \infty$, für alle n groß genug, $F_n(a) \leqslant 2\varepsilon$ und $F_n(b) \geqslant 1-2\varepsilon$.

Sei g beschränkt und stetig. $|g(x)| \leqslant M < \infty$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g$ ist auf die kompacte Interval $[a,b]$ gleichmässig stetig.

Sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $N = N(\delta)$ und N stetigketistellen von F: $a_1 = a < a_2 < \cdots < a_N = b$ s.d.

$$\sup_{x\in(a_k, a_{k+1}]} |g(x) - g(a_k)| \leqslant \delta$$

(wir benutzen die gleichmässig stetigkeit von g auf $[a,b]$). Setze

$$h(x) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{(a_k, a_{k+1}]}(x) g(a_k)$$

(Approximation von g mit einfache Funktionen)

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) \mathrm{d}\mathbb{P}_n(x) = \sum_{k=1}^{N} g(a_k)(F_n(a_{k+1}) - F_n(a_k))$$

Aber auf $[a,b]$ gilt $|g(x)-h(x)|\leqslant\delta$. Deswegen seit $\mathbb{Q}=\mathbb{P}_n,\mathbb{P}$ (d.h. für beide) wir haben

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}\mathbb{Q}(x)-\int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}\mathbb{Q}(x)=\int_{\mathbb{R}}(g(x)-h(x))\mathrm{d}\mathbb{Q}(x)$$

$$=\underbrace{\int_{(-\infty,a)}(g(x)-h(x))\mathrm{d}\mathbb{Q}(x)}_{|*|\leqslant 2M\underbrace{\mathbb{Q}((-\infty,a))}_{\leqslant 2\varepsilon}\leqslant 4M\varepsilon}+\underbrace{\int_{[a,b]}(g(x)-h(x))\mathrm{d}\mathbb{Q}(x)}_{|*|\leqslant\delta\mathbb{Q}([a,b])\leqslant\delta}+\underbrace{\int_{(b,+\infty)}(g(x)-h(x))\mathrm{d}\mathbb{Q}(x)}_{|*|\leqslant 2M\underbrace{\mathbb{Q}((b,+\infty))}_{2\varepsilon}\leqslant 4M\varepsilon}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}\mathbb{Q}(x)-\int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}\mathbb{Q}(x)\right|\leqslant 8\varepsilon M+\delta,\qquad \text{für } \mathbb{Q}=\mathbb{P}_n \text{ oder } \mathbb{Q}=\mathbb{P}.$$

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}\mathbb{P}(x)-\int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_n(x)=\sum_{k=1}^{N} g(a_k)\left[\underbrace{(F(a_{k+1})-F_n(a_{k+1}))}_{\to 0}-\underbrace{(F(a_k)-F_n(a_k))}_{\to 0}\right]$$

weil $(a_k)_k$ sind alles Stetigkeitpunkte von F.
Dann

$$\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_n(x)-\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}\mathbb{P}(x)\right|\leqslant\overbrace{\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_n(x)-\int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_n(x)\right|}^{\leqslant 8\varepsilon M+\delta}$$

$$+\underbrace{\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}\mathbb{P}(x)-\int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}\mathbb{P}(x)\right|}_{\leqslant 8\varepsilon M+\delta}+\underbrace{\left|\int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}\mathbb{P}(x)-\int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_n(x)\right|}_{\to 0,\text{weil } F_n(a_k)\to F(a_k).}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_n(x)-\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}\mathbb{P}(x)\right|\leqslant 16\varepsilon M+\delta.$$

Nehme jetz $\varepsilon,\delta\to 0$ zu sehen dass

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}\mathbb{P}_n(x)\to\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}\mathbb{P}(x).$$

□

Bemerkung. Wahrscheinlichkeiten liegen in einer natürlichen Dualität mit beschränken Funktionen. In diesem Fall bedeutet *schwache Konvergenz* in der Analyse Konvergenz aller Integrale in Bezug auf messbare beschränke Funktionen.

In Wahrscheinlichkeitstheorie ist dieses Konzept nicht sehr nützlich, daher verwenden wir schwache Konvergenz, um zu bezeichnen, was in Analyse schwache-* (weak-star convergence, auf English) Konvergenz bezeichnet wird. In Analyse schwache-* Konvergenz ist die schwache Konvergenz, wenn wir den Raum der Wahrscheinlichkeitmaße als das Dual des Vektoraums stetiger Funktionen betrachten (Riesz-Repräsentationssatz).