UNIVERSITÄT BONN IAM

Vorlesung 14 | 11.12.2020 | (Recorded in advance) [10:15–12:00 via Zoom]

Information der Fachschaft: Dieses Jahr findet die **Mathe–Weihnachtsfeier** am Donnerstag, 17.12, ab 18 ct. online via Zoom statt. Alle aktuellen Informationen sind auf https://fsmath.uni-bonn.de/veranstaltungen-detail/events/virtuelle-mathe-weihnachtsfeier.html zu finden. Schaut vorbei!

Information from the Fachschaft: This year's Math Christmas party will take place at Thursday, the 17.12. starting 18 ct. online via zoom. All current information can be found on https://fsmath.uni-bonn.de/events-detail/events/virtual-christmas-party.html. Swing by!

Weitere information der Fachschaft: Am **22. Dezember 2020 um 19:15** findet ein

Treffen für die Mathe-Lehramtsstudierenden

auf Zoom statt. Die Zugangsdaten findet ihr auf der Fachschaftswebsite (www.fsmath.uni-bonn.de). Wir sind gespannt auf eure Erfahrungen und Eindrücke! Bitte erscheint zahlreich, damit wir viel Rückmeldung bekommen, um das Studium für kommende Generationen zu optimieren.

5 Konvergenzbegriffe (Fortzetzung)

(Kapitel 5 in Bovier Skript)

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen: schwache Konvergenz von Verteilungsfuktionen und von W-Maße, Konvergenz in Verteilung von Z.V., Konvergenz in W-keit von Z.V, Satz von Moivre-Laplace, Konvergenz in L^p, Markov Ungleichung.

5.1 Konvergenz von Verteilungsfunktionen

Definition 1. *Sei $(F_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge von Verteilungsfunktionen. Dann konvergiert F_n schwach gegen eine Verteilungsfunktion F, falls*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$ für welche F stetig ist.

Definition 2. *Sei $(\mathbb{P}_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge von W-Maße auf $(\Omega,\mathscr{B}(\Omega))$ mit Ω topologische Raum. Dann konvergiert $(\mathbb{P}_n)_n$ schwach gegen $\mathbb{P}$ falls für alle beschränkten stetigen Funktionen $g:\Omega\to\mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(\omega)\mathbb{P}_n(\mathrm{d}\omega)\to\int_\Omega g(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega).$$

Satz 3. *Sei $(\mathbb{P}_n)_n$ eine Folge W-maße auf $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ und $F_n(x) := \mathbb{P}_n((-\infty,x])$. Dann konvergiert $(\mathbb{P}_n)_n$ schwach gegen ein W-maß $\mathbb{P}$ mit Verteilungsfunktion $F(x) := \mathbb{P}_n((-\infty,x])$ dann und nur dann, wenn*

$$F_n \xrightarrow[\text{schwach}]{} F.$$

5.2 Konvergenz von Z.V.

Definition 4. *(Konvergenz in Verteilung) Sei $(X_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge von Z.V. wobei X_n auf $(\Omega_n,\mathscr{F}_n,\mathbb{P}_n)$ definiert ist. Dann konvergiert X_n in Verteilung gegen eine Z.V. X,*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} X,$$

falls die Folge $(F_{X_n})_{n\geqslant 1}$ schwach konvergiert gegen F_X, d.h.

$$F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n\leqslant x) \xrightarrow[\text{schwach}]{} F_X(x) = \mathbb{P}(X\leqslant x).$$

Bemerkung. Die Z.V. X_n müssen nicht auf dasselbe W-raum definiert sein!

Definition 5. *(Konvergenz in W-keit) Seien $X, (X_n)_n$ Z.V. auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Die Folge $(X_n)_n$ konvergiert in W-keit gegen X, falls $\forall \varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) = 0.$$

Lemma 6.

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X} \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} \boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} X}$$

Definition 7. *(Konvergenz in L^p) Seien $X, (X_n)_n$ Z.V. auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Sei $p \geqslant 1$ und nehmen wir an $(X_n)_{n\geqslant 1} \subseteq \mathscr{L}^p$, $X \in \mathscr{L}^p$ d.h.*

$$\|X\|_p = \left[\mathbb{E}|X|^p\right]^{1/p} < \infty.$$

Dann konvergiert X_n gegen X in $\mathscr{L}^p$,

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}^p} X,$$

falls

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p = 0.$$

Bemerkung.

$$L^p = \mathscr{L}^p \text{ modulo Äquivalenzklassen } (X \sim Y \Leftrightarrow \|X - Y\|_p = 0)$$

ist ein Banach Raum. Für $p = 2$ ist ein Hilbertraum mit $\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}[XY]$.

Lemma 8.

$$\boxed{X_n \xrightarrow{\mathscr{L}^p} X} \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} \boxed{X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X}$$

Heutigen Vorlesung: Fast sichere Konvergenz, Borel–Cantelli Lemmata, Verbindungen zwischen den verschiedenen Konvergenzbegriffen.

Definition 9. *(Fast sichere konvergenz) Sei $(X_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge von Z.V. auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Dann konvergiert X_n fast sicher gegen $x \in \mathbb{R}$, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ f.s. falls*

$$\mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} X_n = x\Big) = 1.$$

Bemerkung. Frage: Ist

$$\Big\{\omega \in \Omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = x\Big\} \in^? \mathscr{F}.$$

Antwort: Ja!

$$\Big\{\lim_{n\to\infty} X_n = x\Big\} = \Big\{\liminf_{n\to\infty} X_n = \limsup_{n\to\infty} X_n = x\Big\}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big\{\lim_{n\to\infty} |X_n - x| \leqslant \frac{1}{k}\Big\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \underbrace{\Big\{|X_n - x| \leqslant \frac{1}{k}\Big\}}_{\in \mathscr{F}} \in \mathscr{F}$$

Da $\{|X_n - x| \leqslant k^{-1}\} \in \mathscr{F}$ wegen die messbarkeit von X_n und abzählbare $\cup$ und $\cap$.

Bemerkung. Sei $A_n = \{|X_n - x| \leqslant k^{-1}\}$, erinnere dass (u.o. = unendlich oft = ∞-oft)

$$\bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} A_n = \{A_n \text{ u.o. entritt}\} = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

siehe Blatt 3. Dann

$$\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = x\right\} = \text{„für alle } k \in \mathbb{N} \text{ ist, bis auf endlich viele Worte von } n,\ |X_n - x| \leqslant \frac{1}{k}\text{“}$$

$$\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = x\right\}^c = \text{„es gibt } k \in \mathbb{N} \text{ s.d. für } \infty\text{-viele Werte von } n,\ |X_n - X| > \frac{1}{k} \text{ gilt“}$$

Deshalb,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = x\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant 1} \left\{|X_n - x| > \frac{1}{k},\ \infty\text{-oft.}\right\}\right)$$

Fazit: Um die f.s. konvergenz zu zeigen müssen wir

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant 1} \left\{|X_n - x| > \frac{1}{k},\ \text{u.o.}\right\}\right) = 0$$

zeigen. Aber

$$\sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}\left(|X_n - x| > \frac{1}{k},\ \text{u.o.}\right) \geqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant 1} \left\{|X_n - x| > \frac{1}{k},\ \text{u.o.}\right\}\right) \geqslant \max_{k\geqslant 1} \mathbb{P}\left(|X_n - x| > \frac{1}{k},\ \text{u.o.}\right).$$

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} x} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = x\right) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\forall k \geqslant 1, \mathbb{P}\left(\left\{|X_n - x| > \frac{1}{k},\ \text{u.o.}\right\}\right) = 0}$$

Frage: Wie zeigt man eine solche Gleichung?

Lemma 10. *(Borel–Cantelli I) Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein W-raum und $(A_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge in $\mathscr{F}$. Wenn*

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(A_n\ u.o.) = 0.$$

Lemma 11. *(Borel–Cantelli II) Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein W-raum und $(A_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge <u>unabhängigen</u> Ereignissen in $\mathscr{F}$. Wenn*

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(A_n\ u.o.) = 1.$$

Praktischer Korollar

Folgerung 12.

a) Eine Folge $(X_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert f.s. gegen $x \in \mathbb{R}$ wenn $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(|X_n - x| > \varepsilon) < \infty \tag{1}$$

b) Wenn die $(X_n)_n$ unabhängig sind, dann ist (1) notwending.

Beweis. (Lemma 10) Setzen $Q := \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{1}_{A_n}$. Dann $\mathbb{P}(Q = +\infty) = 0$ weil

$$\mathbb{E}[Q] = \mathbb{E}\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{1}_{A_n} \overset{\text{Mon}}{=\!=} \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty.$$

Betrachten, dass

$$\{A_n u.o.\} \subseteq \left\{Q = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{1}_{A_n} = +\infty\right\}$$

Dann $\mathbb{P}(A_n u.o) \leqslant \mathbb{P}(Q = +\infty) = 0.$ □

Beweis. (Lemma 11)

$$0 \leqslant 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant k} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n\geqslant k} A_n\right)^c\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant k} A_n^c\right) \overset{}{\underset{\text{mon}}{=\!=\!=}} \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{N} A_n^c\right)$$

$$\underset{\text{unabhäng.}}{=\!=\!=\!=} \lim_{N\to\infty} \prod_{n=k}^{N} \mathbb{P}(A_n^c) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=k}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_n)) \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{1-x\leqslant e^{-x}}}}{\leqslant} \lim_{N\to\infty} \prod_{n=k}^{N} e^{-\mathbb{P}(A_n)}$$

$$= e^{-\lim_{N\to\infty} \sum_{n=k}^{N} \mathbb{P}(A_n)} = e^{-\infty} = 0.$$

weil $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$. Es folgt

$$\mathbb{P}(A_n u.o.) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant k} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{n\geqslant k} A_n) = 1.$$

□

Beweis. (Folgerung 12) (a) $X_n \xrightarrow{f.s.} x \Rightarrow \forall k \geqslant 1, \mathbb{P}(|X_n - x| > k^{-1} \text{ u.o.}) = 0$. Nehme $A_n = \{|X_n - x| > \varepsilon\}$ und $\varepsilon = k^{-1}$.

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty \underset{\text{BC-I}}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(A_n \text{ u.o.}) = 0.$$

Dass gibt für alle $k \geqslant 1$, dann $X_n \to x$ f.s.

(b) Jetz sind $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ unabhängig. Falls (1) nicht gilt, d.h. $\exists \varepsilon > 0$ s.d.

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(|X_n - x| > \varepsilon) = +\infty.$$

Es folgt $\exists k \geqslant 1$ s.d.

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty \underset{\text{BC-II}}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(A_n \text{ u.o.}) = 1 \Rightarrow X_n \underset{n\to\infty}{\not\to} x \text{ f.s.}$$

weil $(A_n)_n$ unabhängig sind. □

Definition 13. *Sei $(X_n)_n$ und X auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Dann konvergiert $(X_n)_n$ fast sicher gegen X,*

$$X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X \qquad f.s.$$

falls

$$X_n - X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad f.s..$$

Zusammenhang.

Lemma 14.

$$\boxed{X_n \xrightarrow{f.s.} X} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \boxed{X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X}$$

Beweis. $(\Rightarrow)$ Sei $Y_n := X_n - X$. Dann $Y_n \xrightarrow{f.s.} 0$ impliziert $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon \text{ u.o.}) = 0$

$$\Rightarrow 0 = \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon \text{ u.o.}) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant k} \{|Y_n| > \varepsilon\}\right) \geqslant \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k}}_{\limsup_{n\to\infty}} \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) = 0.$$

Das gilt für alle $\varepsilon > 0$, es folgt dass $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.
($\not\Leftarrow$) Gegenbeispiel. Seien $X_n \sim \mathrm{Ber}(n^{-\alpha})$ unabhängig mit $\alpha > 0$, d.h. $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - n^{-\alpha}$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = n^{-\alpha}$. Dann, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Aber $\forall \varepsilon > 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_k| > \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_k = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha \in (0,1] \\ < \infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

Dann, aus Folgerung 12, $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0$ für $\alpha > 1$ aber $X_n \not\xrightarrow{\text{f.s.}} 0$ für $\alpha \in (0,1]$. $\square$

Wir haben das folgende Bewiesen

$$\begin{tikzcd}
\boxed{X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} X} \arrow[r, Rightarrow, shift left, "\text{Lemma 14}"] \arrow[dr, dashed, bend right, "\text{Lemma 17}"] & \boxed{X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X} \arrow[l, dotted, shift left, "\text{Lemma 16}"] \arrow[r, Rightarrow, shift left, "\text{Lemma 6}"] & \boxed{X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X} \arrow[l, dotted, shift left, "\text{Lemma 15}"] \\
 & \boxed{X_n \xrightarrow{L^p} X} \arrow[u, Rightarrow, "\text{Lemma 8}"'] &
\end{tikzcd}$$

Gegenrichtungen mit extra Bedingungen.

Lemma 15. *Sei $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$ und X $\mathbb{P}$-f.s. konstant, dann $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.*

Beweis. Sei $c \in \mathbb{R}$ s.d. $\mathbb{P}(X = c) = 1$. $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon, X = c) + \underbrace{\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon, X \neq c)}_{\leqslant \mathbb{P}(X \neq c) = 0}$$

$$= \mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon, X = c) = \mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) - \underbrace{\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon, X \neq c)}_{\leqslant \mathbb{P}(X \neq c) - 0}$$

$$= \mathbb{P}(X_n > c + \varepsilon \text{ oder } X_n < -c - \varepsilon) = F_{X_n}(c - \varepsilon) + (1 - F_{X_n}(c + \varepsilon))$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} F_X(c - \varepsilon) + (1 - F_X(c + \varepsilon)) = 0$$

für alle ε auf bis eine abzahlbäre Menge. $\square$

Lemma 16. *Sei $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, dann $\exists$ Teilfolge $(X_{n_k})_k$ s.d. $X_{n_k} \xrightarrow{f.s} X$.*

Beweis. Sei $Y_n := X_n - X \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Dann $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ Teilfolge $(Y_{n_k})_k$ s.d.

$$\mathbb{P}(|Y_{n_k}| > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{k^2}, \qquad k \geqslant 1,$$

wegen $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ (d.h. $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) = 0$). Dann

$$\sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}(|Y_{n_k}| > \varepsilon) \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} < \infty \xRightarrow{\text{Folgerung } 12} Y_{n_k} \xrightarrow{f.s.} 0 \Rightarrow X_{n_k} \xrightarrow{f.s.} X.$$

$\square$

Lemma 17. *Sei $p \geqslant 1$. Dann*

$$\boxed{X_n \xrightarrow{f.s.} X \text{ und } \exists Y \in \mathscr{L}^p \text{ s.d. } \forall n,\ |X_n| \leqslant Y} \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X.$$

Beweis. Wir zeigen dass $X \in \mathscr{L}^p$, wir benutzen Fatou'sche Lemma:

$$\mathbb{E}|X|^p = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} |X_n|^p\right] \underset{\text{Fatou}}{\leqslant} \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^p] \leqslant \mathbb{E}[|Y|^p] < \infty.$$

Es folgt aus

$$|X_n - X|^p \leqslant (Y + |X|)^p \in L^1(\mathbb{P})$$

und aus Dominierte Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\underbrace{|X_n - X|^p}_{\leqslant (Y+|X|)^p \in L^1}] \underset{\text{Dom. K.}}{=\!=\!=} \mathbb{E}\Big[\underbrace{\lim_{n\to\infty} |X_n - X|^p}_{=0 \text{ f.s.}}\Big] = 0$$

weil $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} |X_n - X| > 0) = 0$. □

Bemerkung. Für $p \geqslant 1$,

$$\boxed{X_n \xrightarrow{L^p} X} \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[|X_n|^p] \longrightarrow \mathbb{E}[|X|^p]}$$

Weil

$$(\mathbb{E}[|X_n|^p])^{1/p} = \|X_n\|_{L^p} \leqslant \|X\|_{L^p} + \|X_n - X\|_{L^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} \|X\|_{L^p},$$

und

$$\|X_n\|_{L^p} \geqslant \|X\|_{L^p} - \|X_n - X\|_{L^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} \|X\|_{L^p}.$$

Beispiel. Seien $(X_n)_{n\geqslant 1}$ unabhängige Z.V. mit $X_n \sim \mathrm{Poi}(\lambda_n)$. Zeige, dass

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n\geqslant 1} X_n \text{ konvergiert}\right) = 1 \Longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n < \infty$$

(Birth-death process)

Beweis. Sei

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

Wegen stabilität der Poisson Verteilung, ist $S_n \sim \mathrm{Poi}(\sigma_n)$ mit $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k$. Für alle $x \in \mathbb{N}$

$$A_k = \{S_k \leqslant x\} \supseteq A_{k+1} \supseteq \cdots \supseteq$$

(a) Falls $\sigma_n \longrightarrow \sigma < \infty$, dann $x \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(S_\infty \leqslant x) = \mathbb{P}\left(\sum_{k\geqslant 1} X_k \leqslant x\right) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(S_k \leqslant x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{x} e^{-\sigma_k} \frac{\sigma_k^j}{j!} = \sum_{j=0}^{x} e^{-\sigma} \frac{\sigma^j}{j!} < \infty.$$

$\Rightarrow$ Falls $\sigma < \infty$, $S_\infty = \sum_{k\geqslant 1} X_k$ ist eine Poisson Z.V. mit parameter σ.
(b) Falls $\sigma_n \to \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{x} e^{-\sigma_k} \frac{\sigma_k^j}{j!} = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(S_\infty \leqslant x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{N}$. Dann $\mathbb{P}(S_\infty > x) = 1$ und $\mathbb{P}(S_\infty = \infty) = 1$. □

These lecture notes are produced using the computer program $\mathrm{T_EX_{MACS}}$. If you want to know more go here `www.texmacs.org`. We are always looking for new developers which would like to join the developer team!