

Bemerkung. Skript 14, Seite 3: Ich habe falsch schreiben. Was richtig ist, ist:

$$\{A_n \text{ u.o.}\} = \bigcap_{n_0 \geq 1} \bigcup_{n \geq n_0} A_n = \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \sup_{n \geq n_0} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

$$\{A_n \text{ u.o.}\}^c = \bigcup_{n_0 \geq 1} \bigcap_{n \geq n_0} A_n^c = \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \inf_{n \geq n_0} A_n^c = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c$$

Analogie:

$$\mathbb{1}_{\{A_n \text{ u.o.}\}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n}, \quad \mathbb{1}_{\{A_n \text{ u.o.}\}^c} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n^c}.$$

Bemerkung. Falls wir haben $X_n \rightarrow X$ f.s. dann, dass bedeutet dass $\exists N \in \mathcal{F}$ s.d. $\mathbb{P}(N) = 0$ und für all $\omega \in N^c$ wir haben $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ punktweise. Dann wir können schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{1}_{N^c}(\omega) \mathbb{P}(d\omega) + \underbrace{\int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{1}_N(\omega) \mathbb{P}(d\omega)}_{=0 \text{ weil } \mathbb{P}(N)=0} \\ &= \int_{\Omega} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \right] \mathbb{1}_{N^c}(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \right] \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \right] \end{aligned}$$

Siehe Lemma 17 in Skript 14.

6 Das Gesetz der großen Zahlen

(Kapitel 6 in Bovier Skript)

Ziel dieses Kapitel ist das folgende zu zeigen

Satz 1. (Starkes Gesetz der großen Zahlen). Sei $(X_n)_{n \geq 1}$ eine Folge i.i.d. Z.V. $X_n \in \mathcal{L}^1$. Dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = \mathbb{E}[X_1], \quad \text{f.s.}$$

Das Gesetz der großen Zahlen (GGZ/LLN, Law of large numbers) ist neben dem zentralen Grenzwertsatz (ZGS/CLT, Central limit theorem) eines der beiden wichtigsten Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Es bietet eine „interne“ mathematische Verbindung zwischen dem Konzept der *Wahrscheinlichkeit* und dem der *Häufigkeit* eines Ereignisses.

Seit (E, \mathcal{E}) eine bestimmte Ergebnisraum mit seine σ -Algebra von Ereignisses und und betrachten Sie die Situation, in der wir ein Experiment wiederholen, das von (E, \mathcal{E}) beschrieben wird. Wir nehmen an, dass wir auf E eine Wahrscheinlichkeit P haben.

Wir können immer einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und unabhängige Zufallsvariablen $(Y_n)_{n \geq 1}$ darüber konstruieren, so dass $Y_n: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ und $\mathbb{P}(Y_n \in A) = P(A)$ für alle $A \in \mathcal{E}$, $n \geq 1$.

Die *Häufigkeit* von $A \in \mathcal{E}$ in einer Reihe von wiederholten Experimenten ist gegeben durch

$$F_n(A) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_A(Y_k).$$

Andererseits, die *Wahrscheinlichkeit* von A ist $P(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(Y_k)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(Y_1)]$.

Sei $X_k = \mathbb{1}_A(Y_k)$, dann X_k integrierbar ist und die Folge $(X_n)_n$ i.i.d. ist.

Das GGZ zeigen, dass die Folge von Z.V. $(F_n(A))_n$ fast sicher konvergiert gegen dem deterministischen Wert $P(A)$:

$$F_n(A) \rightarrow P(A).$$

Dies spiegelt unsere alltägliche Erfahrung der Konvergenz der Häufigkeit zufälliger Ereignisse zu einem nicht zufälligen Wert wider.

Wir brauchen Werkzeuge.

6.1 Momenten

Sei X eine reelle Z.V. mit Verteilungsfunktion $F_X(s) := \mathbb{P}(X \leq s)$. Wir kennen schon den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x \mathbb{P}_X(dx)$$

wobei $\mathbb{P}_X := \mathbb{P} \circ X^{-1}$ ist die Verteilung von X . Insbesondere, falls \mathbb{P}_X abs. stetig bzgl. Lebesgue mit Dichte ρ_X dann

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \rho_X(x) dx.$$

Es ist offensichtlich das „Massenzentrum“. Die Streuung (Abweichungen) bzgl. $\mathbb{E}[X]$ kann man durch verschiedene Größe messen.

Die erste ist die Varianz:

$$\text{Var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

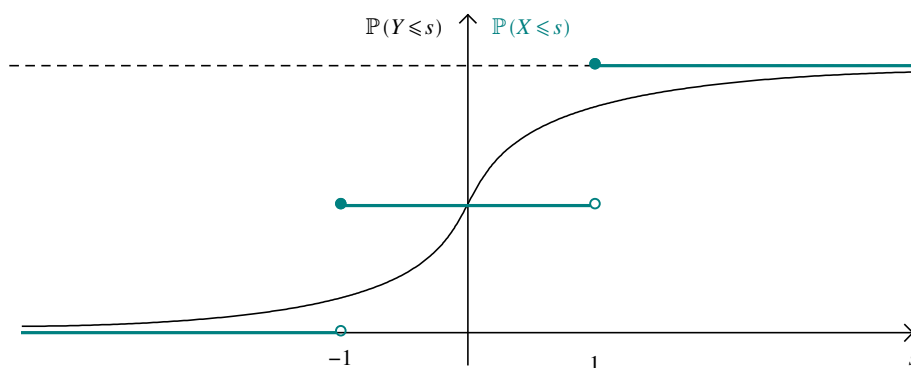
Die Standardabweichung ist $(\text{Var}(X))^{1/2}$.

Es gibt aber viele Verteilungen (∞ -viele) mit gegebenen $\mathbb{E}[X]$ und $\text{Var}[X]$.

Beispiel.

$$\mathbb{P}(X = \pm 1) = 1/2 \Rightarrow \mathbb{E}[X] = 0, \text{Var}(X) = 1.$$

$$Y \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow \mathbb{E}[Y] = 0, \text{Var}(Y) = 1.$$



Definition 2. Sei X eine reelle Z.V. Der n -th Moment von X ist durch

$$M_n := \mathbb{E}[X^n]$$

definiert, falls $|X|^n \in L^1$.

Frage. Reich die Menge $(M_n)_{n \geq 1}$ aus, um die Verteilung von X zu bestimmen?

Antwort: in allgemeinen nein, aber oft ja!

Satz 3. Sei $(M_n)_{n \geq 1}$ eine Folge reelle Zahlen mit Eigenschaften

- a) $M_{2n} \geq 0$
- b) $\exists c > 0$ s.d. $\sum_{n \geq 1} M_{2n} \frac{c^{2n}}{(2n)!} < \infty$.

Dann \exists höchstens ein W-Maß \mathbb{P} auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ s.d.

$$M_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mathbb{P}(x)$$

für alle $n \geq 1$.

(Ohne Beweis)

Bemerkung. Wir sagen nichts über die Existenz.

Bemerkung. Falls für eine Z.V. b) ist erfüllt, dann ist die Verteilung der Z.V. durch ihre Momenten eindeutig bestimmt.

Um die Momenten zu berechnen, es ist sehr nützlich eine erzeugende Funktion zu bestimmen.

Definition 4. Die Momenten erzeugende Funktion $\psi = \psi_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ einer Z.V. X ist definiert durch

$$\psi(z) := \mathbb{E}[e^{zX}], \quad z \in \mathbb{R}.$$

Ziemlich oft existiert $\psi(z)$ nicht für alle z , manchmal sogar nicht für alle $z \neq 0$.

Lemma 5. Sei X eine Z.V. Falls $\exists h > 0$ s.d. $\psi(\pm h) < \infty$ dann

- a) $\psi(z)$ existiert für alle $|z| \leq h$.
- b) $\psi \in C^\infty$ für $|z| < h$.
- c)

$$M_n = \left. \frac{d^n}{dz^n} \psi(z) \right|_{z=0}$$

Beweis. (a) Falls $\psi(\pm h) < \infty$, der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!} \mathbb{E}[X^n]$$

ist $\geq h$. Dann $\psi(z)$ existiert für alle $|z| \leq h$.

(b) Für $|z| < h$ die Taylor-Reihe ist für alle Ordnung definiert.

(c)

$$\frac{d^n}{dz^n} \psi(z) = \sum_{m \geq n} \frac{z^{m-n} m(m-1) \cdots (m-n+1)}{m!} \mathbb{E}[X^m]$$

und für $z=0$ nur $m=n$ bleibt. D.h.

$$\left. \frac{d^n}{dz^n} \psi(z) \right|_{z=0} = \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!} \mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[X^n].$$

□

Bemerkung. Wir können die Satz auch zeigen als folgt. Wir haben

$$e^{zx} \leq e^{hx} + e^{-hx}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

für alle $|z| \leq h$. Dann

$$\psi(z) = \mathbb{E}[e^{zX}] \leq \mathbb{E}[e^{hx} + e^{-hx}] \leq \psi(h) + \psi(-h) < \infty.$$

Das prüfen Teil (a). Für Teil (b) wir haben

$$e^{(z+g)x} - e^{zx} = gx \int_0^1 e^{(z+\tau g)x} d\tau$$

und dann

$$\frac{\psi(z+g) - \psi(z)}{g} = \frac{\mathbb{E}[e^{(z+g)X} - e^{zX}]}{g} = \mathbb{E}\left[X \int_0^1 e^{(z+\tau g)X} d\tau\right]$$

und

$$\lim_{g \rightarrow 0} \frac{\psi(z+g) - \psi(z)}{g} = \lim_{g \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[X \int_0^1 e^{(z+\tau g)X} d\tau\right] \stackrel{\text{Dom.}}{=} \mathbb{E}\left[\lim_{g \rightarrow 0} \left(X \int_0^1 e^{(z+\tau g)X} d\tau\right)\right] = \mathbb{E}[Xe^{zX}]$$

weil für $|z| < h$ wir haben auch $|z + \tau g| + \varepsilon \leq h$ für ε, g klein genug, und dann wir benutzen dass

$$|X| \leq e^{\varepsilon|X|}$$

und (1) zu schreiben

$$\left| X \int_0^1 e^{(z+\tau g)X} d\tau \right| \leq |X| \int_0^1 e^{|\tau g| |X|} d\tau \leq \int_0^1 e^{(\varepsilon + |\tau g|) |X|} d\tau \leq e^{h|X|} \leq e^{hX} + e^{-hX} \in L^1$$

und wir können die Dominierte Konvergenz benutzen und $\lim_{g \rightarrow 0}$ und \mathbb{E} vertauschen. Dass zeigen dass ψ ist differenzierbar und auch dass $\psi'(z) = \mathbb{E}[Xe^{zX}]$ und dann ist einfach zur zeigen dass $\psi'(0) = \mathbb{E}[X]$. Für die anderes Momenten wir können machen eine ähnliche Beweis.,

Einige momentenerzeugende Funktionen

\mathbb{P}_X	$\psi_X(z) = \mathbb{E}[e^{zX}]$
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$e^{\sigma^2 z^2 / 2 + mz}, \quad z \in \mathbb{R}$
$\text{Exp}(\lambda)$	$\frac{1}{1 - z/\lambda}, \quad z < \lambda$
$\text{Poi}(\lambda)$	$\exp(-\lambda(e^z - 1)), \quad z \in \mathbb{R}$
$\text{Geo}(q)$	$\frac{1-q}{1-qe^z}, \quad z < \log(1/q)$
$\text{Bin}(n, p)$	$(1-p+pe^z)^n, \quad z \in \mathbb{R}$
$\text{Cauchy}(a)$	$\begin{cases} +\infty, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$

Beispiel. $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Wir können schreiben $X = Y_1 + \cdots + Y_n$ mit $Y_k \sim \text{Ber}(p)$ und unabh. Dann

$$\psi_X(z) = \mathbb{E}[e^{zX}] = \mathbb{E}[e^{zY_1} \cdots e^{zY_n}] \stackrel{\text{unabh.}}{=} \mathbb{E}[e^{zY_1}] \cdots \mathbb{E}[e^{zY_n}] = ((1-p)e^{z0} + pe^{z1})^n = (1-p+pe^z)^n.$$

6.2 Ungleichungen

Momenten sind oft nützlich um obere Schranken von Werten zu bestimmen.

Lemma 6. (Tchebichev Ungleichung) Sei X eine reelle Z.V. Dann $\forall a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}.$$

Beweis. O.B.d.A. sei $\mathbb{E}[X] = 0$. Dann,

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{|X| \geq a}] \leq \mathbb{E}\left[\underbrace{\frac{|X|^2}{a^2}}_{\geq 1} \mathbb{1}_{|X| \geq a}\right] \leq \mathbb{E}\left[\frac{X^2}{a^2}\right] = \frac{\mathbb{E}[X^2]}{a^2} \stackrel{\mathbb{E}[X]=0}{=} \frac{\text{Var}(X)}{a^2}.$$

□

Lemma 7. (Markov Ungleichung) Sei X eine reelle Z.V.. Dann, für alle $a > 0, p > 0$

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{a^p}$$

Beweis. Fast wie das von Lemma 6. □

Eine allgemeiner Ungleichung ist

Lemma 8. Sei X eine reelle Z.V., $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ monoton wachsend. Dann für alle $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(a)}.$$

Beweis. Für $x \geq a$ wir haben $f(x) \geq f(a)$ und dann

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X \geq a}] \leq \mathbb{E}\left[\underbrace{\frac{f(X)}{f(a)}}_{\geq 1} \mathbb{1}_{X \geq a}\right] \leq \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(a)}.$$

□

Wir können das benutzen mit $f(x) = x^p$ für $x \geq 0, a \geq 0$ oder z.B. $f(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \geq 0$.

Beispiel. Sei $f(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \geq 0$. Dann, Lemma 8 gibt

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-\lambda a} \mathbb{E}[e^{\lambda X}] = e^{-\lambda a} \psi_X(\lambda)$$

für alle $\lambda \geq 0$. Man kann über λ minimieren!

Folgerung 9. Sei X eine reelle Z.V.. Dann für alle $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \inf_{\lambda \geq 0} [e^{-\lambda a} \mathbb{E}[e^{\lambda X}]]$$

Bemerkung. Diese letzte Formel gibt deutlich bessere Oberschranke als die Tchebichev Ungleichung.

Sei z. B. $X \sim \text{Exp}(1)$: für $z < 1$,

$$\psi(z) = \int_0^\infty e^{zx} e^{-x} dx = \frac{1}{1-z}, \quad \psi'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad \psi''(z) = \frac{2}{(1-z)^3},$$

$$\mathbb{E}[X] = \psi'(0) = 1, \quad \mathbb{E}[X^2] = \psi''(0) = 2, \quad \Rightarrow \text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 1.$$

Tchebichev Ungleichung gibt:

$$\mathbb{P}(|X - 1| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2} = \frac{1}{a^2} \quad (2)$$

Aus Korollar 9,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \inf_{\lambda \geq 0} \left[\underbrace{e^{-\lambda a} \frac{1}{1-\lambda}}_{\varphi(\lambda)} \right], \quad \varphi(\lambda) = e^{-\lambda a} \frac{1}{1-\lambda}.$$

$$0 = \varphi'(\lambda) = e^{-\lambda a} \left[-\frac{a}{1-\lambda} + \frac{1}{(1-\lambda)^2} \right] \Rightarrow a = \frac{1}{1-\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{a-1}{a} < 1.$$

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq a e^{1-a} \quad (3)$$

Wobei die exacte Formel gibt

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \int_a^\infty e^{-x} dx = e^{-a} \quad (4)$$

Man sieht, dass (3) deutlich bessere als (2) den wahren Wert (4) annähert.

Information der Fachschaft: Dieses Jahr findet die **Mathe-Weihnachtsfeier** am Donnerstag, 17.12, ab 18 ct. online via Zoom statt. Alle aktuellen Informationen sind auf <https://fsmath.uni-bonn.de/veranstaltungen-detail/events/virtuelle-mathe-weihnachtsfeier.html> zu finden. Schaut vorbei!

Information from the Fachschaft: This year's Math Christmas party will take place at Thursday, the 17.12. starting 18 ct. online via zoom. All current information can be found on <https://fsmath.uni-bonn.de/events-detail/events/virtual-christmas-party.html>. Swing by!

Weitere information der Fachschaft: Am **22. Dezember 2020 um 19:15** findet ein

Treffen für die Mathe-Lehramtsstudierenden

auf Zoom statt. Die Zugangsdaten findet ihr auf der Fachschaftswebsite (www.fsmath.uni-bonn.de). Wir sind gespannt auf eure Erfahrungen und Eindrücke! Bitte erscheint zahlreich, damit wir viel Rückmeldung bekommen, um das Studium für kommende Generationen zu optimieren.

Diese Vorlesungsunterlagen werden mit dem Computerprogramm $\text{T}_{\text{E}}\text{X}_{\text{M}}\text{A}^{\text{C}}\text{S}$ erstellt. Wenn Sie mehr wissen möchten, gehen Sie hier: www.texmacs.org. Wir sind immer auf der Suche nach neuen Entwicklern, die dem Entwicklerteam beitreten möchten!

These lecture notes are produced using the computer program $\text{T}_{\text{E}}\text{X}_{\text{M}}\text{A}^{\text{C}}\text{S}$. If you want to know more go here www.texmacs.org. We are always looking for new developers which would like to join the developer team!