Vorlesung 17 | 22.12.2020 | 14:15–16:00 via Zoom

Weitere information der Fachschaft: Am **22. Dezember 2020 um 19:15** findet ein

Treffen für die Mathe-Lehramtsstudierenden

auf Zoom statt. Die Zugangsdaten findet ihr auf der Fachschaftswebsite (www.fsmath.uni-bonn.de). Wir sind gespannt auf eure Erfahrungen und Eindrücke! Bitte erscheint zahlreich, damit wir viel Rückmeldung bekommen, um das Studium für kommende Generationen zu optimieren.

6 Das Gesetz der großen Zahlen (Fortsetzung und Ende)

(Kapitel 6 in Bovier Skript)

Satz 1. *(Starkes Gesetz der großen Zahlen). Sei $(X_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge i.i.d. Z.V. $X_n \in \mathscr{L}^1$. Dann*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \mathbb{E}[X_1], \quad f.s.$$

6.4 Kolmogorov'sche Ungleichung

Statt $\mathbb{P}(S_n \geqslant a)$, wollen wir eine Ungleichung für

$$\mathbb{P}(S_n^* \geqslant a)$$

wo $S_n^* := \max_{k\leqslant n} S_k$ ist die laufendes Maximum von die Stochastiche Prozess $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

Lemma 15. *(Kolmogorov'sche Ungleichung) Seien $(X_n)_{n\geqslant 1}$ unabhängige Z.V. mit $\mu_k = \mathbb{E}[X_k]$, $\sigma_k^2 = \mathrm{Var}(X_k)$. Setze*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad m_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = \mathbb{E}[S_n],$$

und

$$s_n^2 := \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = \mathrm{Var}(S_n).$$

Dann, für alle $t > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\exists k \leqslant n \text{ s.d. } |S_k - m_k| \geqslant t s_n\right) \leqslant t^{-2}.$$

6.5 Beweis von Satz 1

Lemma 16. *Seien $(X_k)_{k\geqslant 1}$ unabhängige Z.V. mit $\mathrm{Var}(X_k) = \sigma_k^2$, $\mathbb{E}[X_k] = \mu_k$. Falls*

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{\sigma_k^2}{k^2} < \infty,$$

dann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu_k) \to 0 \quad f.s..$$

Beweis. OBdA $\mu_k = 0$ weil $\mathrm{Var}(X_k) = \mathrm{Var}(X_k - \mu_k) = \sigma_k^2$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu_k) = \frac{S_n}{n}$$

mit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Z.z. $S_n/n \to 0$ f.s. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|S_n/n| > \varepsilon \text{ u.o.}) = 0$. Sei

$$A_m := \bigcup_{2^{m-1} < n \leqslant 2^m} \{|S_n| \geqslant \varepsilon n\}$$

für alle $m \geqslant 1$.

$$\mathbb{P}(A_m) = \mathbb{P}(\exists k \in \{2^{m-1}, \dots, 2^m\} : |S_k| \geqslant \varepsilon k) \leqslant \mathbb{P}(\exists k \in \{2^{m-1}, \dots, 2^m\} : |S_k| \geqslant \varepsilon 2^{m-1})$$

$$\underset{\text{Lemma 15}}{\leqslant} \frac{s^2_{2^m}}{\varepsilon^2 2^{2(m-1)}}$$

mit $s^2_{2^m} = \mathrm{Var}(S_{2^m})$. Aber

$$\sum_{m \geqslant 1} \mathbb{P}(A_m) \leqslant \sum_{m \geqslant 1} \frac{s^2_{2^m}}{\varepsilon^2 2^{2(m-1)}} = \sum_{m \geqslant 1} \frac{1}{\varepsilon^2 2^{2(m-1)}} \sum_{n=1}^{2^m} \sigma_n^2 = \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{n \geqslant 1} \sigma_n^2 \underbrace{\sum_{m : 2^m \geqslant n} \frac{1}{2^{2m}}}_{\leqslant \frac{8}{n^2}} \leqslant \frac{32}{\varepsilon^2} \sum_{n \geqslant 1} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$$

für alle $\varepsilon > 0$, wegen die Annhame aus $(\sigma_n)_{n \geqslant 1}$. Borel–Cantelli I gibt dass $\mathbb{P}(A_m \text{ u.o.}) = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(|S_n/n| > \varepsilon \text{ u.o.}) = 0$$

weil $\{|S_n/n| > \varepsilon \text{ u.o.}\} = \{A_m \text{ u.o.}\}$. □

Bemerkung. Sei m_0 s.d. $2^{m_0} \leqslant n < 2^{m_0+1}$

$$\sum_{m : 2^m \geqslant n} \frac{1}{2^{2m}} \leqslant \sum_{m \geqslant m_0} \frac{1}{2^{2m}} = \frac{1}{2^{2m_0}} \sum_{k = m - m_0 \geqslant 0} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{2^2}{2^{2(m_0+1)}} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \leqslant \frac{4}{n^2} \cdot \frac{4}{3} \leqslant \frac{8}{n^2}.$$

Jetz können wir das Gesetz der großen Zahlen beweisen.

Beweis. (of Thm. 1) (a) Idea: „trunkation“. Zerlegen X_k im $X_k = U_k + V_k$ wobei

$$U_k = X_k \mathbb{1}_{|X_k| < k}, \qquad V_k = X_k \mathbb{1}_{|X_k| \geqslant k}.$$

Sei

$$\sigma_k^2 = \mathrm{Var}(U_k) \leqslant \mathbb{E}[U_k^2] = \mathbb{E}[|X_k|^2 \mathbb{1}_{|X_k| < k}] = \mathbb{E}\Bigg[|X_k|^2 \underbrace{\sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{1}_{\ell - 1 < |X_k| \leqslant \ell}}_{\mathbb{1}_{|X_k| < k}}\Bigg]$$

$$= \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{E}[|X_k|^2 \mathbb{1}_{\ell-1 < |X_k| \leqslant \ell}] \leqslant \sum_{\ell=1}^{k} \ell \underbrace{\mathbb{E}[|X_k| \mathbb{1}_{\ell-1 < |X_k| \leqslant \ell}]}_{=: a_\ell}$$

(a_ℓ ist unab. von k weil $X_1, X_2, \dots$ i.i.d).

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{\sigma_k^2}{k^2} \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2} \sum_{\ell=1}^{k} \ell a_\ell = \sum_{\ell \geqslant 1} \ell a_\ell \underbrace{\sum_{k \geqslant \ell} \frac{1}{k^2}}_{\leqslant C/\ell} \leqslant C \sum_{\ell \geqslant 1} a_\ell = C \sum_{\ell \geqslant 1} \mathbb{E}[|X_1| \mathbb{1}_{\ell-1 < |X_1| \leqslant \ell}] = C\, \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$$

weil $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ (Annhame).
(b) $\mathbb{E}[U_k] = \mu - \mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_{|X_k| \geqslant k}]$. Aber

$$|\mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_{|X_k| \geqslant k}]| \leqslant \mathbb{E}[|X_k| \mathbb{1}_{|X_k| \geqslant k}] = \sum_{\ell \geqslant k+1} a_\ell \to 0$$

weil $\sum_{\ell \geqslant 0} a_\ell < \infty$ als $k \to \infty$. Das bedeutet, dass $\mathbb{E}[U_k] \to \mu$ und auch dass (Übung! Siehe Ana I velleich)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[U_k] \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu.$$

Lemma 16 gibt

$$0 \xleftarrow{f.s.} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(U_k - \mathbb{E}[U_k]) \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k \xrightarrow{f.s.} \mu.$$

c) Zeigen wir, V_k nur endlich oft nicht gleich Null ist:

$$\mathbb{P}(V_n \neq 0) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{|X_n|\geqslant n}] = \sum_{\ell\geqslant n+1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\ell-1<|X_k|\leqslant \ell}] \leqslant \sum_{\ell\geqslant n+1} \mathbb{E}[\frac{|X_k|}{\ell-1}\mathbb{1}_{\ell-1<|X_k|\leqslant \ell}] = \sum_{\ell\geqslant n+1}\frac{a_\ell}{\ell-1} = \sum_{\ell\geqslant n}\frac{a_{\ell+1}}{\ell}.$$

Dann

$$\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(V_n\neq 0) \leqslant \sum_{n\geqslant 1}\sum_{\ell\geqslant n}\frac{a_{\ell+1}}{\ell} = \sum_{\ell\geqslant 1}\frac{a_{\ell+1}}{\ell}\sum_{n=1}^{\ell} 1 = \sum_{\ell\geqslant 1} a_{\ell+1} < \infty$$

weil $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Borell-Cantelli I gibt

$$\mathbb{P}(V_n \neq 0 \text{ u.o.}) = 0 \Longrightarrow \forall k \geqslant 1, \mathbb{P}\left(|V_n| > \frac{1}{k} u.o.\right) = 0 \Longrightarrow V_n \xrightarrow{f.s.} 0 \Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k \xrightarrow{f.s.} 0.$$

Dann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V_k \xrightarrow{f.s.} \mu.$$

□

Bemerkung.

- Schwaches Gesetz : Konvergenz in W-keit (2-Moment Bedingung)
- Starkes Gesetz : f.s. Konvergenz (nur erste Moment Bedingung + unabhängig und indentische Verteilt Z.V.)

6.6 Große Abweichungen von GGZ

Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d Z.V. integrierbar. Sei $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ mit $\mathbb{E}[X_i] = m$, und sei $\psi(t) = \mathbb{E}[e^{tX_1}]$. Dann wegen GGZ:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[f.s.]{} m.$$

Satz 17. *Für alle $n \geqslant 1$, $a \in \mathbb{R}$*

$$(a)\ \ \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant e^{-nI(a)}, \qquad \textit{für } a \geqslant m$$
$$(b)\ \ \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leqslant a\right) \leqslant e^{-nI(a)}, \qquad \textit{für } a \leqslant m$$

wobei die exponentielle Abfallrate $I(a)$ ist gegeben durch

$$I(a) = \sup_{t\in\mathbb{R}}[at - \log\psi(t)].$$

Bemerkung. Oft wir können sagen dass für „gute Menge“ $G \subseteq \mathbb{R}$:

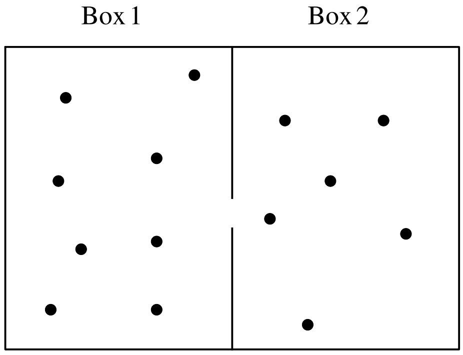
$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}\in G\right) = \inf_{a\in G} I(a).$$

Das ist die Theorie von Große Abweichungen. Das bedeuted dass typischeweise wir haben

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) = e^{-n(I(a)+o(1))}, \qquad \text{als } n\to\infty.$$

Beispiel. Modell von ein Gas. Jede Moleküle hat W-keit $1/2$ in Box 1 zu sein und sind unabhängig (ideal gas), d.h. $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathrm{Ber}(1/2)$ Z.V. wobei

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{falls Moleküle \#}k \text{ in Box 1 ist} \\ 0 & \text{falls Moleküle \#}k \text{ in Box 2 ist} \end{cases}$$



$$n = 10^{23} \text{ Moleküle (Teilchen)}$$

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{Box} 1) = \mathrm{Vol}(\mathrm{Box}\, 2)$$

Frage:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\#\text{Teilchen in Box 1}}{n} \geqslant \frac{1}{2} + 10^{-10}\right) \leqslant p = ?$$

Tchebichev Abschätzung: ($\mathrm{Var}(X_k) = 1/4$)

$$p \leqslant \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{(10^{-10})^2} = \frac{10^{20}}{4\, 10^{23}} = \frac{1}{4000}.$$

Abschatzüng mit Theorem 17. $m = 1/2$ un ein explizit Rechnüng gibt

$$I(a) = a \log(2a) + (1-a)\log(2(1-a))$$

$$p \leqslant e^{-2n(10^{-10})^2} = e^{-2000}!!!$$
