Vorlesung 19 | 15.1.2021 | 14:15–16:00 via Zoom

7 Der zentrale Grenzwertsatz

(Kapitel 7 in Bovier Skript)

7.2 Charakteristiche Funktionen

Bemerkung. Errinnerung Complexer Zahlen:

$$z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad z^* = \bar{z} = x - iy, \quad \mathrm{Re}(z) = x = \frac{z + z^*}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = y = \frac{z - z^*}{2i}, \qquad |z|^2 = z^* z = x^2 + y^2$$

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(iy)^n}{n!}, \qquad e^z = e^x e^{iy}, \quad e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \qquad e^{i2\pi} = 1,$$

$$|e^{iy}| = e^{iy} e^{-iy} = 1, \qquad |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

Für eine beliebige mass μ auf $(\Omega, \mathscr{F})$

$$f, g : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \int (f(x) + ig(x))\,\mu(\mathrm{d}x) = \int f(x)\,\mu(\mathrm{d}x) + i \int g(x)\,\mu(\mathrm{d}x).$$

Wir haben

$$\left| \int (f(x) + ig(x))\,\mu(\mathrm{d}x) \right| \leqslant \int |f(x) + ig(x)|\,\mu(\mathrm{d}x).$$

Tatsächlich, wenn $\int |h(x)|\mu(\mathrm{d}x) < \infty$ dann (mit Fubini)

$$0 \leqslant \left| \int h(x)\,\mu(\mathrm{d}x) \right|^2 = \int h(x)\,\mu(\mathrm{d}x) \int (h(x))^* \mu(\mathrm{d}x) = \overbrace{\int \int h(x)(h(y))^* \mu(\mathrm{d}y)\,\mu(\mathrm{d}x)}^{\in \mathbb{R}}$$

$$\mathrm{Re}\Big(\int \int h(x)(h(y))^* \mu(\mathrm{d}y)\,\mu(\mathrm{d}x) \Big) = \int \int \mathrm{Re}\,(h(x)(h(y))^*)\,\mu(\mathrm{d}y)\,\mu(\mathrm{d}x) \leqslant \int \int |h(x)(h(y))^*|\,\mu(\mathrm{d}y)\,\mu(\mathrm{d}x)$$

$$= \int |h(x)|\mu(\mathrm{d}x) \int |h(y)|\mu(\mathrm{d}y) = \Big(\int |h(x)|\mu(\mathrm{d}x) \Big)^2$$

Definition 1. *Sei X eine reelle Z.V.. Dann die charakteristische Funktion von X definiert durch*

$$\phi(t) = \phi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\,\mathbb{E}[\sin(tX)] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathbb{P}_X(\mathrm{d}x)$$

mit $\mathbb{P}_X$ die Verteilung von X.

Bemerkung. (von die lezte Vorlesung) $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist (immer) wohldefiniert mit $\phi_X(0) = 1$, $|\phi_X(t)| \leqslant 1$, $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$ falls $X \sim -X$. ϕ ist gleichmässig stetig. Falls n-momenten existieren dann $\phi \in C^n$ und

$$\phi(0) = 1, \qquad \phi^{(n)}(0) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \phi(t) \Big|_{t=0} = i^n \mathbb{E}[X^n].$$

Falls $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige dann $\phi_{X_1 + \cdots + X_n} = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(t)$.

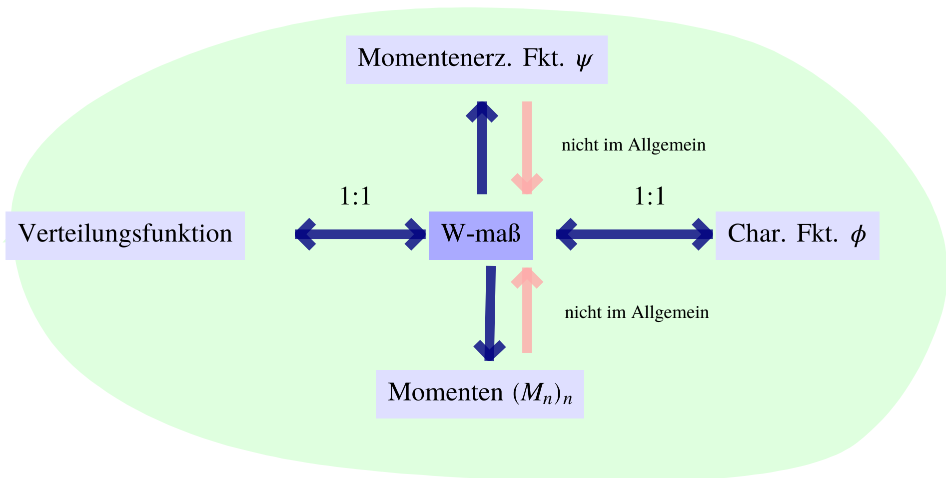
Charakteristische Funktionen einiger Verteilungen

$\mathbb{P}_X$	$\phi^X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$	$\psi(z) = \mathbb{E}[e^{zX}]$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$	$e^{z\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2}$
$\mathrm{Ber}(p)$	$(1 - p + pe^{it})$	$(1 - p + pe^{z})$
$\mathrm{Bin}(n, p)$	$(1 - p + pe^{it})^n$	$(1 - p + pe^{z})^n$
$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$	$e^{\lambda(e^{z}-1)}$
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$(1 - it/\lambda)^{-1}$	$(1 - z/\lambda)^{-1}, \quad z < \lambda$
$\mathrm{Geo}(q)$	$\dfrac{1-q}{1-qe^{it}}$	$\dfrac{1-q}{1-qe^{z}}$
$\mathrm{Cauchy}(a)$	$e^{-a\lvert t\rvert}$	$+\infty, \quad z \neq 0$

nicht Ableitbar in 0!

Wieso haben wir $\phi(t)$ eingefürth?

Satz 6. *Die charakteristiche Funktion einer Z.V. legt deren Verteilung eindeutig fast.*



Zum Beweis von Thm. 6 brauchen wir $\phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(t)$.

Lemma 7. *Sei* $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. *Dann*

$$\phi_X(t) = \exp(-t^2\sigma^2/2).$$

Beweis. Direkte Rechnung mit komplex Integration ist leicht:

$$\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2/2\sigma^2} \frac{\mathrm{d}x}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \in \mathbb{R}.$$

Oder: mit Ableitung: $\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2 < \infty$ dann $\phi_X \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ und

$$\phi_X'(t) = \mathbb{E}[iXe^{itX}] = \frac{i}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \underbrace{xe^{-x^2/2\sigma^2}}_{= -\sigma^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{-x^2/2\sigma^2})} \mathrm{d}x$$

Integration in Teilstücken:

$$=\underbrace{\frac{-i\sigma^2}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\left(e^{itx}e^{-x^2/2\sigma^2}\right)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{=0}+\underbrace{\frac{i^2t\sigma^2}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}}e^{itx}e^{-x^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x.}_{-t\sigma^2\phi_X(t)}$$

Das bedeutet dass $\phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist die Lösung für

$$\begin{cases}\phi_X'(t)=-t\sigma^2\phi_X(t)\\ \phi_X(0)=1\end{cases}$$

dass ist:

$$\Rightarrow\log\phi_X(t)=\log\phi_X(0)-\sigma^2\int_0^t s\mathrm{d}s=-\frac{1}{2}\sigma^2t^2.$$

$$\phi_X(t)=\exp(-\sigma^2t^2/2).$$

□

Beweis. (of Thm. 6). Setze

$$p_\sigma(x):=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}e^{-x^2/2\sigma^2}$$

die Dichte (bzg. Lebesgue) einer $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ Z.V.. Für ein W-Maß μ auf $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$ setzen wir

$$f_\sigma(x)=\int_{\mathbb{R}}p_\sigma(x-y)\,\mu(\mathrm{d}y)=(\underbrace{p_\sigma*\mu}_{\text{Faltung}})(x)$$

f_σ ist die Dichte von $\sigma Y+Z$, wobei $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$ und $Z\sim\mu$ und Y,Z unabhängige Z.V. sind. Die Verteilung von $\sigma Y+Z$ ist μ_σ mit

$$\mathrm{d}\mu_\sigma(x)=f_\sigma(x)\mathrm{d}x.$$

Idee: Wenn $\sigma\downarrow 0$ dann $\sigma Y\to 0$ und $\mu_\sigma\to\mu$ (schwach).

<u>Schritt 1</u>. (a) Zeigen wir dass μ_σ ist durch ϕ_μ eindeutig bestimmt. (hier $\phi_\mu(t)=\int e^{itx}\mu(\mathrm{d}x)$). Es gilt

$$(2\pi\sigma^2)^{1/2}p_\sigma(x)=e^{-x^2/2\sigma^2}\underset{\text{Lemma 7}}{=}\int_{\mathbb{R}}p_{1/\sigma}(t)e^{itx}\mathrm{d}t$$

$$f_\sigma(x)=\int_{\mathbb{R}}p_\sigma(x-y)\,\mu(\mathrm{d}y)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}}\mu(\mathrm{d}y)\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}te^{-it(x-y)}p_{1/\sigma}(t)$$

(wir können die Integrale vertauschen weil $\int_{\mathbb{R}}\mu(\mathrm{d}y)\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}tp_{1/\sigma}(t)=1<\infty$)

$$\underset{\text{Fubini-Leb.}}{=}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}tp_{1/\sigma}(t)\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\mu(\mathrm{d}y)e^{-it(x-y)}}_{e^{-itx}\phi_\mu(t)}$$

$$f_\sigma(x)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}tp_{1/\sigma}(t)e^{-itx}\phi_\mu(t)$$

Die Dichte f_σ von μ_σ ist durch ϕ_μ bestimmt.

<u>Schritt 2</u>. Sei $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ beschränkt, stetig $\Rightarrow$ Wir wollen zeigen dass

$$\int_{\mathbb{R}}h(x)\mathrm{d}\mu(x)=\lim_{\sigma\to 0}\int_{\mathbb{R}}h(x)\mathrm{d}\mu_\sigma(x)=\lim_{\sigma\to 0}\int_{\mathbb{R}}h(x)f_\sigma(x)\mathrm{d}x$$

weil denn μ ist eindeutig durch ϕ_μ festgelegt. (Siehe auch Satz 3, Kapitel 4).

$\forall \sigma > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}\mu_\sigma(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}\mu(x) = \mathbb{E}[h(Z+\sigma Y)] - \mathbb{E}[h(Z)] = \mathbb{E}[(h(Z+\sigma Y) - h(Z))]$$

Jetz $|h(\sigma Y + Z) - h(Z)| \leqslant 2\sup_x |h(x)|$ und $h(\sigma Y + Z) - h(Z) \to 0$ als $\sigma \to 0$ f.s. weil $h(\sigma Y(\omega) + Z(\omega)) - h(Z(\omega)) \to 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann dominierte Konvergenz, gibt

$$\mathbb{E}[(h(\sigma Y + Z) - h(Z))] \to 0.$$

□

Frage: Gegeben ϕ_X, wie kann man die Verteilung von X explizit ausrechnen?

Satz 8. *Sei ϕ die char. Fkt. einer Z.V. X mit Verteilung μ.*

a) Dann $\forall\ a < b$:

$$\mu((a,b)) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\}) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\mathrm{d}t.$$

b) Falls $\int|\phi(t)|\mathrm{d}t < \infty$ dann μ ist absolut stetig bzlg. Lebesgue mit stetiger Dichte

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\phi(t)\mathrm{d}t.$$

Bemerkung. In die Fall b wir haben auch

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\rho(x)\mathrm{d}x.$$

In Analyse ϕ ist die Fourier-transform von ρ und ρ ist die inverse Fourier-transform von ϕ.

Beweis. (a) Sei $T > 0$, $a < b$ gegeben

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\underbrace{\phi(t)}_{\int e^{itx}\mu(\mathrm{d}x)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}\mu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t$$

(die Fkt $(x,t) \mapsto \frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}$ ist beschrankt. Dann wir können Fubini-Lebesgue benutzen weil das mass $\mu(\mathrm{d}x)\otimes\mathrm{d}t$ auf $\mathbb{R}\times[-T,T]$ ist endlich)

$$\underset{\text{Fubini-Leb.}}{=}\int_{\mathbb{R}}\underbrace{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}\mathrm{d}t\right]}_{=:H^T_{a,b}(x)}\mu(\mathrm{d}x)$$

$$H^T_{a,b}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}\mathrm{d}t = \int_{-T(x-a)}^{T(x-a)}\frac{\sin\tau}{2\pi\,\tau}\mathrm{d}\tau - \int_{-T(x-b)}^{T(x-b)}\frac{\sin\tau}{2\pi\,\tau}\mathrm{d}\tau.$$

Wir haben dass

$$\lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}\frac{\sin\tau}{2\pi\,\tau}\mathrm{d}\tau = \text{„}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\tau}{2\pi\,\tau}\mathrm{d}\tau\text{“} = \frac{1}{2}.$$

(Bemerkung: die Fkt $\frac{\sin\tau}{2\pi\,\tau}$ ist nicht integrierbar! die Integral ist eine uneigentlich Riemann integrierbar) wegen Cauchy Residuensatz, z. B. Dann

1. $x > b > a$ oder $b > a > x$:

$$\lim_{T\to\infty} H^T_{a,b}(x) = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}\frac{\sin\tau}{2\pi\,\tau}\mathrm{d}\tau - \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}\frac{\sin\tau}{2\pi\,\tau}\mathrm{d}\tau = 0.$$

2. $b > x > a$:

$$\lim_{T\to\infty} H^T_{a,b}(x) = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}\frac{\sin\tau}{2\pi\,\tau}\mathrm{d}\tau + \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}\frac{\sin\tau}{2\pi\,\tau}\mathrm{d}\tau = 1.$$

3. $x=b$:

$$\lim_{T\to\infty} H_{a,b}^T(x) = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}\frac{\sin\tau}{2\pi\,\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}.$$

4. $x=a$:

$$\lim_{T\to\infty} H_{a,b}^T(x) = \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L}\frac{\sin\tau}{2\pi\,\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung:

$$\int_{-L}^{L}\frac{\sin\tau}{2\pi\,\tau}\mathrm{d}\tau = \int_{-L}^{L}\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}(\cos\tau-1)}{\tau} = \frac{1}{2\pi}\frac{\cos\tau-1}{\tau}\bigg|_{\tau=-L}^{\tau=L} + \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\cos\tau-1}{\tau^2}\mathrm{d}\tau < C.$$

Dazu ist $H_{a,b}^T(x)$ beschrankt in T und x und wegen Dominierte Konv., erhalten wir

$$\lim_{T\to\infty}\int_{\mathbb{R}} H_{a,b}^T(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{a,b\}} + \mathbb{1}_{(a,b)}\right]\mu(\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\mu(\{a,b\}) + \mu((a,b)).$$

(b) Sei nur $\phi(t)$ integrierbar. Dann $(x,t)\mapsto\phi(t)e^{-itx}$ ist integrierbar auf $\{(x,t)\in[a,b]\times\mathbb{R}\}$. Daraus folgt, dass die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\phi(t)\mathrm{d}t$$

ist integrierbar auf $[a,b]$. Fubini-Lebesgue und Teil (a) geben uns:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left[\int_a^b e^{-itx}\mathrm{d}x\right]\phi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it}\phi(t)\mathrm{d}t$$

$$\underset{\text{Dom.}K.}{=}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it}\phi(t)\mathrm{d}t \underset{\text{Teil}\,(a)}{=} \mu((a,b)) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\}).$$

Dann für alle $a<b$ wir haben

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu((a,b)) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\}).$$

Für klein $\varepsilon>0$,

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x = \mu((a+\varepsilon,b-\varepsilon)) + \frac{1}{2}\mu(\{a+\varepsilon,b-\varepsilon\}) \leqslant \mu((a,b)) \leqslant \mu((a,b)) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\}) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \mu((a,b)) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Das bedeutet dass

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu((a,b)),$$

und auch $\mu(\{a,b\})=0$. Dann f ist die Dichte von μ:

$$F_\mu(t) = \mu((-\infty,t]) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x.$$

□

Diese Vorlesungsunterlagen werden mit dem Computerprogramm $\mathrm{T_EX_{MACS}}$ erstellt. Wenn Sie mehr wissen möchten, gehen Sie hier : www.texmacs.org. Wir sind immer auf der Suche nach neuen Entwicklern, die dem Entwicklerteam beitreten möchten!

These lecture notes are produced using the computer program $\mathrm{T_EX_{MACS}}$. If you want to know more go here www.texmacs.org. We are always looking for new developers which would like to join the developer team!