Vorlesung 2 – 30.10.2020 – 10:15 – 12:00 via Zoom

[Vorlesung 1 – 2020.10.27 wurde abgesagt]

- Vorlesung beggint um 10:15 und endet um 12:00.
- *Webseiten für die Vorlesung*

  https://www.iam.uni-bonn.de/abteilung-gubinelli/einf-wahrscheinlichkeitstheorie-ws2021

  https://ecampus.uni-bonn.de/goto_ecampus_crs_1907666.html
- Nach jeder Vorlesung werde ich die Notizen online stellen. Auf meiner Webseite.
- Übungsgruppen
  - Montag 8 - 10 Uhr **(online)** Gruppe 1
  - Montag 12 - 14 Uhr (Präsenz) Gruppe 2
  - Montag 14 - 16 Uhr (online) Gruppe 5
  - Donnerstag 8 - 10 Uhr (Präsenz) Gruppe 3
  - Donnerstag 12 - 14 (Präsenz) Gruppe 4
  - Donnerstag 12 - 14 (online) Gruppe 6
- Die Anmeldung zu den Übungsgruppen findet online auf der e-Campus Seite der Übungen (nicht auf der Vorlesungsseite) statt. Sie sich zunächst für den Kurs

  „V2F1 - **Übungen** zu Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie"

  anmelden. Die Registrierung für die Übungsgruppen startet dann heute nach der Vorlesung um 12 Uhr.
- Es besteht die Möglichkeit, dass eine neue Übungsgruppe eröffnet wird (heute oder nächste Woche). Auf eCampus wird eine Umfrage zum möglichen Zeitfenster durchgeführt.
- 1. Übungsblatt, dass bis nächste Woche Freitag der 6.11. um 10 Uhr über eCampus hochgeladen werden muss.
- Bitte tuen Sie sich in Übungsgruppen von bis zu 3 Personen zusammen.
- Zögern Sie nicht, Fragen über das Forum in eCampus zu stellen.
- Die Vorträge werden aufgezeichnet und auf eCampus zur Verfügung gestellt. Die Aufnahmen werden wenige Wochen nach Semesterende gelöscht.

Inhalt der Vorlesung

1. Einleitung, WT als Maßtheorie, Zufallsvariablen, Integration. (~3 Wochen)
2. Bedingte W-keit, Unabhängigkeit, Produktmaße. (~2 Wochen)
3. Kovergenzbegriffe für Maße/Zufalls Variablen. (~2 Wochen)
4. Gesetz der großen Zahlen. (~2 Wochen)
5. Charakteristische Funktionen. Zentrale Grenzwertsatz. (~2 Wochen)
6. Markov-ketten in diskreter Zeit. (~ 3 Wochen)

Literature

- Die Vorlesung wird sich weitgehend an dem Lehrbuch **Stochastik. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik** von Hans-Otto Georgii (de Gruyter Verlag) orientieren, wobei wir nicht allen Stoff behandeln können.
- Achim Klenke, **Wahrscheinlichkeitstheorie**, Springer 2006
- William Feller, **An introduction to probability and its applications** Vol. 1., John Wiley, 1978

Skript

- Wir werden dem Skript von Prof. Bovier folgen (WS1920). (link auf webseite der Vorlesung)
- Nach jeder Vorlesung werde ich die Notizen online stellen. Auf meiner Webseite.

1 Einleitung und Masstheorie

1.1 Grundlagen

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Wahrscheinlichkeit: ein Mass für die Ungewissheit über das Eintreten eines Ereignisses (Zufallsereignisses), ausgedrückt als Teil der Gewissheit.

Zwei Ansätze:

a) **subjectiv:** (Logische oder Bayes'sche) Ein Maß für das subjektive Vertrauen in einem bestimmten Fall A (*Ereignis*). Aufgrund logischer Prinzipien muss diese Maßnahme bestimmte Eigenschaften in Bezug auf logische Operationen an Ereignissen erfüllen. Man kann dieses bestimmt, z.B. durch das Wettverhältnis "Einsatz : Gewinn" $= P(A) / P(\text{nich} A)$, das der Person fair erscheint.

b) **frequentistisch:** Grenzwert der relativen Häufigkeit des Eintretens von ein Ereignis A bei unabhängigen Wiederholungen. Dies ist die Grundlage der Statistik und allgemein aller experimentellen Wissenschaften.

Ereignisse sind Aussagen, Fragen die man mit Ja/Nein antworten kann:

- "Das Resultat ist eine gerade Zahl" (Ist … ?)
- "Der dritte Wurf ist Kopf"
- "Die Masse des Saturn ist x innerhalb von 1/100 dieses Wertes" (Laplace (1812) „*Ich wette 11.000 zu 1, dass der Fehler in diesem Ergebnis nicht größer ist als 1/100 seines Wertes.*")
- "Der Wert dieser Aktie erreicht vor Montag 100 Euro"
- "Das Teilchen bleibt immer in einer Kugel vom Radius r um 0"

▷ Ereignisse $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \ldots$ können kombiniert werden (mit Logische Verknüpfung)

- und: „$\tilde{E}_1 \wedge \tilde{E}_2$ ist eingetreten" $\Leftrightarrow$ „$\tilde{E}_1$ ist eingetreten und $\tilde{E}_2$ ist eingetreten"
- oder: „$\tilde{E}_1 \vee \tilde{E}_2$ ist eingetreten" $\Leftrightarrow$ „$\tilde{E}_1$ ist eingetreten oder $\tilde{E}_2$ ist eingetreten"
- nicht „$\neg\tilde{E}_1$ ist eingetreten" $\Leftrightarrow$ „$\tilde{E}_1$ ist nicht eingetreten"

Ereignisse sind eine Boolesche Algebra.

▷ Wir haben grundlegende Ereignisse und Situationen:

- $\tilde{\Omega} \equiv$ „sicheres Ereignis": tritt immer ein
- $\tilde{\emptyset} \equiv$ „unmögliches Ereignis": tritt nie ein

- „$\tilde{E}_1$ und $\tilde{E}_2$ unvereinbar sind“ $\Leftrightarrow$ $\tilde{E}_1 \wedge \tilde{E}_2 = \tilde{\emptyset}$.

▷ Zu jeder Ereignis $\tilde{E}$ möchte man eine Zahl

$$P(\tilde{E}) \in [0,1],$$

assozieren: die Wahrscheinlichkeit von $\tilde{E}$ (subjectiv oder frequentistisch).

Minimale Eigenschaften:

- $P(\tilde{\Omega}) = 1$, $P(\tilde{\emptyset}) = 0$
- Falls $\tilde{E}_1 \wedge \tilde{E}_2 = \tilde{\emptyset}$ dann $P(\tilde{E}_1 \vee \tilde{E}_2) = P(\tilde{E}_1) + P(\tilde{E}_2)$ (endliche Additivität)

Bemerkung. Da $\neg\tilde{E}_1 \wedge \tilde{E}_1 = \tilde{\emptyset}$ und $\neg\tilde{E}_1 \vee \tilde{E}_1 = \tilde{\Omega}$ dann $1 = P(\neg\tilde{E}_1 \vee \tilde{E}_1) = P(\neg\tilde{E}_1) + P(\tilde{E}_1)$ und auch $P(\neg\tilde{E}_1) = 1 - P(\tilde{E}_1)$.

Wir sehen, dass die Wahrscheinlichkeit die Grundstruktur der Maßtheorie teilt.

Kolmogorov (1933) basierte die Wahrscheinlichkeitstheorie auf der Maßtheorie (die von Borel, Lebesgue und anderen entwickelt wurde).

Um das zu tun führte er das Konzept eines Wahrscheinlichkeitsraums ein. (Kolmogorov'sche Axiome)

Wahrscheinlichkeitsraum (W-raum) ist eine Triple $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

- Ω, *Menge der Ergenbisse* (also elementarer Ereignisse). Man assoziert zu jedes Ereignis $\tilde{E}$ eine Untermenge E von Ω. Wir werden von jetz an direkt mit Teilmenge arbeiten un die auch Ereignisse nennen.

$$\tilde{E} \to E \subset \Omega : E = \{\omega \in \Omega \,|\, \text{„}\tilde{E} \text{ eintritt, falls das Ergebnis des Experiment } \omega \text{ ist“}\}$$

- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ das Mengensystem der beobachtbaren Ereignisse (eine σ-Algebra, zu definier). Eine Teilmenge der Potenzmenge auf Ω.
- $\mathbb{P}$ eine Abbildung von $\mathcal{F}$ nach $[0,1]$, die die Wahrscheinlichkeit jedes beobachtbaren Ereignisses geben.

Ereignisse	Teilemenge von Ω
$\tilde{E}_k$	$E_k \subset \Omega$
$\tilde{E}_1 \wedge \tilde{E}_2$	$E_1 \cap E_2$
$\tilde{E}_1 \vee \tilde{E}_2$	$E_1 \cup E_2$
$\neg\tilde{E}_k$	$E_k^c \equiv \Omega \setminus E_k$
$\tilde{E}_1$ und $\tilde{E}_2$ unvereinbar	$E_1 \cap E_2 = \emptyset$
$\tilde{\Omega}$(sicheres Ereignis)	Ω
$\tilde{\emptyset}$	$\emptyset$
(Logisch)	(Mengetheoretisch)

Wichtig: Ereignisse gelten als Teilmengen von ein gut gewähltes Menge Ω.

Wie wir die Menge der Ergebnisse Ω wahlen? Gewollt: Falls man das Ergebnis eines Zufallsexperiment kennt, dann kann man für alle Ereignisse bestimme ob die eingetreten sind oder nich.

Beispiel.

- Einmaliges Würfeln. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Mehrmaliges Würfeln. $\Omega = \{1, ..., 6\}^n$ (Produktraum). Die i-te Koordinate ω_i eines n-Tuples $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$ beschreibt dabei die Augenzahl beim i-ten Wurf.
- Vielleicht is aber man gar nicht an der Reihenfolge der Würfe interessiert, sönder nur auch der Häufigkeit der einzelen Augenzahlen. Dann man die Ergebnismenge

  $$\Omega = \left\{ k \in \mathbb{Z}_+^6 : \sum_{i=1}^{6} k_i = n \right\} \subseteq \mathbb{Z}_+^6$$

  wahlen können. $\mathbb{Z}_+$ ist die Menge der nichtnegative ganzen Zahlen. Und k_a is der Anzahl der Würfe, bei denen der Augenzahl a fällt.
- Unendlich widerholten Munzwürf. $\Omega = \{K, Z\}^{\mathbb{N}}$. Die Ereignis

  $$E_n = \text{„Bei } n \text{ Würfen die Munze fällt mindstens } k\text{-mal Zahl"}$$

  $$= \left\{ \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \Omega : \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\omega_i = Z} = k \right\}$$

  ist ein Teilmenge des Ergebnisraum $\{K, Z\}^n$ (endlich oft widerholter Munzwürf) un auch des Raum $\{K, Z\}^{\mathbb{N}}$.

  Notation: $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ is die Indicatorfunktion eine Menge A, d.h. $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ wenn $\omega \in A$ oder $=0$ wenn $\omega \notin A$. Aber $\mathbb{1}_{\omega_i = Z}$ bedeuten auch 1 wenn $\omega_i = Z$ oder 0 wenn $\omega_i = K$. So wenn E eine Aussage ist dann $\mathbb{1}_E$ bedeutet 1 wenn E entritt und 0 andersfalls.
- Züfallige Bewegung eines Teilchens in $\mathbb{R}^n$ (n-dim euclidische Raum):

  $$\Omega = C(\mathbb{R}_{\geqslant 0}; \mathbb{R}^n)$$

  die Raum der stetigen Pfade $\omega : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}^n$ mit Zeitraum $\mathbb{R}_{\geqslant 0} = \{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}$. Dann die Ereignis

  $$\tilde{E} = \text{„Das Teilchen bleibt immer in einer Kugel vom Radius } r \text{ um 0"}$$

  als

  $$E = \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{t \geqslant 0} |\omega(t)| \leqslant r \right\}$$

  darstellen werden können.

Die Wahl von Ω etwas *willkürlich* ist. Aber der Formalisierung (nach Kolmogorov) sollte durch eine bestimte Gründmenge Ω passieren.

Die abstrakte Boolesche Algebra der Ereignisse wird dann zu einer konkreten (Booleschen) Algebra von Mengen.

Definition 1. *(σ-Algebra und Messraumen) Sei Ω eine beliebige Menge, $\mathscr{F}$ eine Menge von Teilmengen von Ω mit der Eigenschaften*

a) $\Omega \in \mathscr{F}$, $\emptyset \in \mathscr{F}$;

b) Falls $A \in \mathscr{F}$, dann $A^c \equiv \Omega \backslash A \in \mathscr{F}$; (komplementstabiliät)

c) Falls $A_n \in \mathscr{F}$ für $n \in \mathbb{N}$, dann $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{F}$. ($\sigma$-vereinigungsstabiliät)

Dann ist $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra und das Paar $(\Omega, \mathscr{F})$ heisst ein Messraum.

Frage. Sei $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra von Ω. Welche der folgenden Aussage sind wahr?

a) $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{F}$

b) $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \backslash B := A \cap B^c \in \mathscr{F}$

c) Falls $A_n \in \mathscr{F}$ für $n \in \mathbb{N}$, dann $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{F}$.

d) Falls $A_r \in \mathscr{F}$ für $r \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, dann $\cup_{r\in[0,1]} A_r \in \mathscr{F}$.

Antwort: a) wahr, b) wahr, c) wahr, d) falsch weil $[0,1]$ ist unbazälbar.

Bemerkung.

- $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{F}$ weil wir nehmen $A_1 = A, A_2 = B,$ und $A_n = \emptyset$ für $n \geqslant 3$ auf c) können. Dann auch endlichen Vereinigungen Elementen von $\mathscr{F}$ liegen in $\mathscr{F}$.
- Für eine (σ-)Algebra $\mathscr{F}$, $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{F}$ weil $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ (de Morgansche Gesatz)
- c) mit nur eine endliche Zahr von $A_n \Rightarrow$ Algebra
- Eigenschaft c) ist wichtig, da damit Aussagen über Grenzwerten möglich sein werden

Beispiel. Wir werfen wiederholt eine Münze, bis wir Kopf erhalten. Wir können nehmen $\Omega = \{K, Z\}^{\mathbb{N}}$. Nehmen wir das $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra ist und das die Ereignis

$$A_k = \{\omega \in \Omega \colon \omega_k = K\}$$

für $k \geqslant 1$ alles in $\mathscr{F}$ sind. Dann die Ereignis $E =$ „Schließlich erhalten Kopf“ liegt auch in $\mathscr{F}$ weil

$$E = \{\omega \in \Omega \colon \exists k \geqslant 1 \colon \omega_k = K\} = \cup_{k\geqslant 1} A_k.$$

Bemerkung.

- Drei Ebenen: Ergebnis: $\omega \in A \subseteq \Omega$. Ereignis: $A \in \mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$. Ereignis-Systeme: $\mathscr{F} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(\Omega))$.
- $\mathscr{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra.

Wichtige Eigenschaften. Sei $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra

- Durchschnitt von σ-Algebras ist immer noch eine σ-Algebra (zeigen Sie).
- Vereinungen von σ-Algebras ist nicht in Allgemeinen eine σ-Algebra (Gegenbeispiel?)
- Sei $f\colon \Omega \to \Omega'$ eine beliebige Abbildung und $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra von Ω', dann

  $$f^{-1}(\mathscr{F}) = \{f^{-1}(A) \subseteq \Omega\colon A \in \mathscr{F}\} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$$

  ist immer eine σ-Algebra. (Vorbild auf σ-Algebras sind auch σ-Algebras)
- Wenn $g\colon \Omega \to \Omega'$ dann ist

  $$g(\mathscr{F}) = \{g(A) \subseteq \Omega'\colon A \in \mathscr{F}\} \subseteq \mathscr{P}(\Omega')$$

  nicht in Allgemeinen eine σ-Algebra (z.B. wenn g nicht surjectiv ist).

Definition 2. *Für eine Menge $\mathscr{E}$ von Teilmengen von Ω definiert man $\sigma(\mathscr{E})$, die von $\mathscr{E}$ erzeugte σ-Algebra, als die* ***kleinste*** *σ-algebra die $\mathscr{E}$ enthält, d.h.*

$$\sigma(\mathscr{E}) = \cap\{\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)\colon \mathscr{F} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra und } \mathscr{E} \subset \mathscr{F}\}$$

$\mathscr{E}$ ist ein Erzeuger von $\sigma(\mathscr{E})$.
