Vorlesung 20 | 19.1.2021 | 14:15–16:00 via Zoom

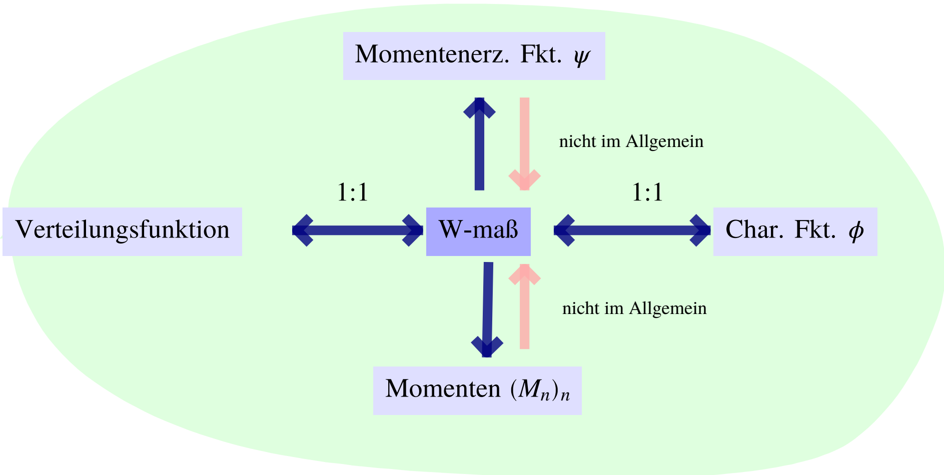
7 Der zentrale Grenzwertsatz (fortsetzung)

(Kapitel 7 in Bovier Skript)

7.2 Charakteristiche Funktionen

Erinnerung von die letze Vorlesung.

Satz 6. *Die charakteristiche Funktion einer Z.V. legt deren Verteilung eindeutig fast.*



Lemma 7. *Sei $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Dann*

$$\phi_X(t) = \exp(-t^2\sigma^2/2).$$

Satz 8. *Sei ϕ die char. Fkt. einer Z.V. X mit Verteilung μ.*

a) *Dann $\forall\ a < b$:*

$$\mu((a,b)) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\}) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\mathrm{d}t.$$

b) *Falls $\int|\phi(t)|\mathrm{d}t < \infty$ dann μ ist absolut stetig bzlg. Lebesgue mit stetiger Dichte*

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\phi(t)\mathrm{d}t.$$

Bemerkung. In die Fall b wir haben auch

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\rho(x)\mathrm{d}x.$$

In Analyse ϕ ist die Fourier-transform von ρ und ρ ist die inverse Fourier-transform von ϕ.

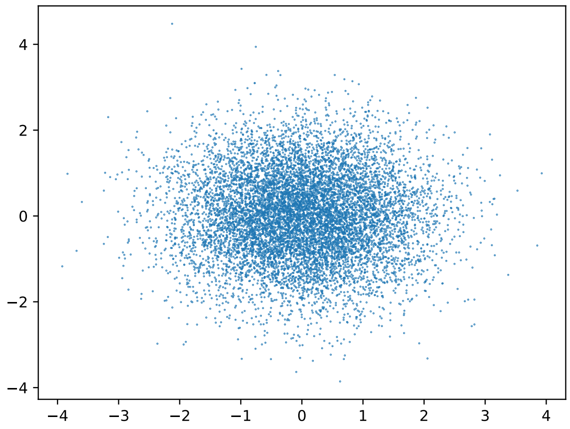
Heutige Vorlesung.

Beispiel. Seien $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ unabhängige Z.V.. Finde die Dichte von

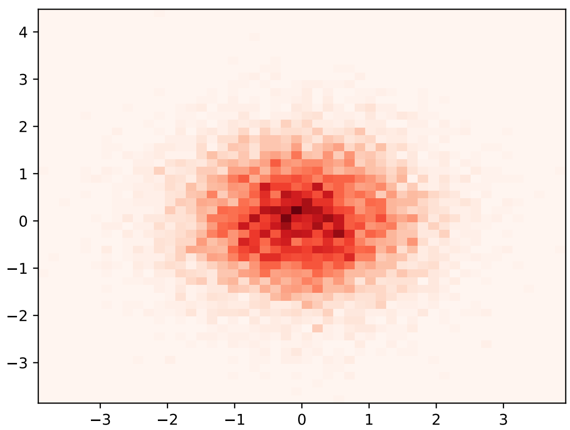
$$Z = X^2 + Y^2.$$

```
Python 3.7.6 (default, Dec 30 2019, 19:38:26)
[Clang 11.0.0 (clang-1100.0.33.16)]
Python plugin for TeXmacs.
```

```
   Please see the documentation in Help -> Plugins -> Python
>>> import numpy as np
    import matplotlib.pyplot as plt
>>> # 0. Zufallszahlengenerator initialisieren
    rng = np.random.RandomState(seed=42)
    N = 10000

    # 1. Generiere N X und Y, die N (0, 1) sind.
    X, Y = rng.randn(N), rng.randn(N)
>>> # Streudiagramm (Scatterplot)
    plt.clf()
    plt.plot(X, Y,  linestyle='', marker='.', markersize=0.7)
    pdf_out(plt.gcf())
```




```
>>> # Dichtediagramm (density plot)
    plt.clf()
    plt.hist2d(X, Y, bins=(50, 50), cmap=plt.cm.Reds)
    pdf_out(plt.gcf())
```




```
>>>
```

Beispiel. (Fortsetzung) Seien $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ unabhängige Z.V. Finde die Dichte von

$$Z = X^2 + Y^2.$$

Wir haben

$$\phi_{X^2}(t) = \mathbb{E}[e^{iX^2 t}] = \int_{\mathbb{R}} e^{ix^2 t} e^{-x^2/2} \frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^{1/2}} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n \geqslant 0} \frac{(it)^n}{n!} x^{2n} e^{-x^2/2} \frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^{1/2}} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(it)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^{2n} e^{-x^2/2} \frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^{1/2}},$$

aber wir konnen einfach zeigen dass falls $|\lambda|<1$ dann

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{\lambda^n}{n!}\int_{\mathbb{R}} x^{2n}e^{-x^2/2}\frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^{1/2}}=\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x^2}e^{-x^2/2}\frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^{1/2}}=\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2(1-2\lambda)^{-1}}}\frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^{1/2}}$$

$$=(1-2\lambda)^{-1/2}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2(1-\lambda)^{-1}}}\frac{\mathrm{d}x}{(2\pi(1-2\lambda)^{-1})^{1/2}}}_{=1}=\frac{1}{(1-2\lambda)^{1/2}}.$$

Warum wir können die Integrale mit die $\sum_{n\geqslant 0}$ vertauschen? Weil

$$\sum_{n\geqslant 0}\int_{\mathbb{R}}\underbrace{\frac{|\lambda|^n}{n!}x^{2n}e^{-x^2/2}}_{\geqslant 0}\frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^{1/2}}\underset{\text{Fubini}}{=\!=}\int_{\mathbb{R}}\sum_{n\geqslant 0}\frac{|\lambda|^n}{n!}x^{2n}e^{-x^2/2}\frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^{1/2}}=\int_{\mathbb{R}} e^{|\lambda|x^2}e^{-x^2/2}\frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^{1/2}}<\infty$$

falls $|\lambda|<1$. Dann $(x,n)\mapsto\frac{|\lambda|^n}{n!}x^{2n}e^{-x^2/2}$ ist integrierbar bzlg. $\sum_{n\geqslant 0}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x$ und wir können Fubini-Lebesgue benutzen.
Die koeffizient beieder Reihen übereinstimmen, dann wir haben dass die complexe Funktion:

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}\int_{\mathbb{R}} x^{2n}e^{-x^2/2}\frac{\mathrm{d}x}{(2\pi)^{1/2}}$$

ist so dass

$$f(\lambda)=\frac{1}{(1-2\lambda)^{1/2}},\qquad \phi_{X^2}(t)=f(it)=\frac{1}{(1-2it)^{1/2}}.$$

Es folgt dass

$$\phi_Z(t)\underset{\text{unab.}}{=\!=}\phi_{X^2}(t)\phi_{Y^2}(t)=(\phi_{X^2}(t))^2=\frac{1}{1-2it}=\phi_{\mathrm{Exp}(1/2)}(t).$$

Dann wir mussen haben dass

$$\boxed{Z=X^2+Y^2\sim\mathrm{Exp}(1/2)}$$

Wir können auch das rechnen mit ein Änderung von Variablen.

Diese Beobachtung liefert eine sehr gute Methode zur Erzeugung einer Gaußschen Zufallsvariablen.

Lemma 9. *(Box–Müller Methode) Sei Z,Θ unab. und s.d.*

$$Z\sim\mathrm{Exp}(1/2),\qquad \Theta\sim\mathscr{U}([0,2\pi]).$$

Setzen

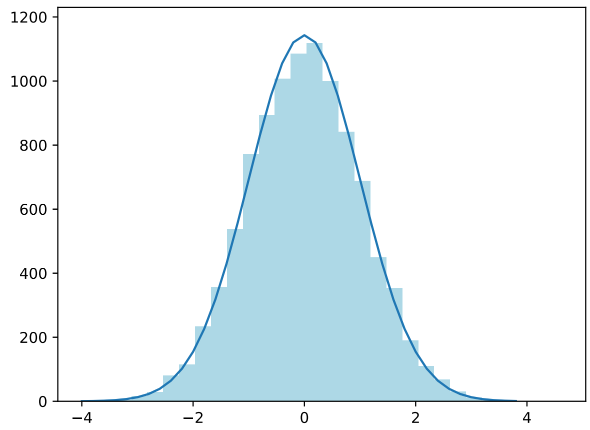
$$X=Z^{1/2}\cos(\Theta),\qquad Y=Z^{1/2}\sin(\Theta).$$

Dann X,Y unab. sind und $X\sim Y\sim\mathscr{N}(0,1)$.

(Ohne Beweis)

```
>>> import numpy as np
    import matplotlib.pyplot as plt

    # 0. Zufallszahlengenerator initialisieren
    rng = np.random.RandomState(seed=42)
    N = 10000
    # 1. Generiere N U1 und U2, die Unif (0, 1) sind.
    U1, U2 = rng.uniform(size=N), rng.uniform(size=N)

    # 2. Transformiere U1 in Z und U2 in Theta
    Z = -2*np.log(U1) # Warum funktioniert das?
    Theta = 2*np.pi*U2

    # 3. Berechne R=sqrt(Z) nur einmal!
    R = np.sqrt(Z)

    # 3. Berechne X,Y auf R,Theta
    X, Y = R*np.cos(Theta), R*np.sin(Theta)
```

```
>>> plt.clf()
    hx, hy, _ = plt.hist(X,  bins=30, color="lightblue")
    dx = (np.max(X)-np.min(X))/30
    plt.ylim(0.0,max(hx)*1.1)
    x = np.arange(-4., 4., 0.2)
    plt.plot(x, N*dx*np.exp(-x**2/2)/np.sqrt(2*np.pi))
    pdf_out(plt.gcf())
```




```
>>>
>>>
```

Bemerkung. Die Berechnung von Sinus und Cosinus ist sehr teuer, es gibt eine andere Methode, die dies vermeidet:
Wirf zwei unabhängige Zufallsvariablen $U, V \sim \mathscr{U}(0,1)$ bis $R^2 = U^2 + V^2 \leqslant 1$. Dann ist

$$(U, V) \sim \mathscr{U}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\})$$

(Wir beweisen dass nicht hier). Setze

$$X = \frac{2\log(R)}{R} U, \qquad Y = \frac{2\log(R)}{R} V.$$

Wir haben dass $X, Y \sim \mathscr{N}(0,1)$ und unabhängig sind.

Satz 10. *Transformationssatz von Integralen)*

a) *Eindimensionale: Sei $X : \Omega \to D \subseteq \mathbb{R}$ ein Z.V. mit absolut Stetiger Verteilung, ρ_X die Dichte. Sei*

$$\phi : D \to \mathbb{R}$$

stetig differentierbar mit $\phi'(x) \neq 0$ $\forall x \in D$. Dann $\phi(X) : \Omega \to \phi(D)$ hat Dichte

$$\rho_{\phi(X)}(y) = \rho_X(\phi^{-1}(y)) \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \phi^{-1}(y) \right| \mathbb{1}_{y \in \phi(D)}.$$

b) *Mehrdimensionale: Seien $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$, $X : \Omega \to S$ eine Z.V. mit absolut stetiger Verteilung μ_X mit Dichte ρ_X. Sei $\psi : S \to T$ ein Diffeomorphismus C^1 mit $\det \mathrm{D}\psi(x) \neq 0$, $\forall x \in S$. Dann ist die Verteilung von $\psi(X)$ absolut stetig (bzgl. Lebesgue in $\mathbb{R}^n$) mit Dichte*

$$\rho_{\psi(X)}(y) = \rho_X(\psi^{-1}(y)) |\det(D\psi^{-1}(y))| \mathbb{1}_{y \in \psi(D)}$$

wobei

$$\det(D\psi^{-1}(y)) = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=1,\ldots,n}, \qquad x = \psi^{-1}(y).$$

(Wir beweisen es nicht in WT1)

Bemerkung. Der Zusatzfaktor $|\det(D\psi^{-1}(y))|$ beschreibt die Transformation des Volumens (d.h. des Leb. Maß) bei Anwenden der Abbildung ψ^{-1}: ein infinitesimale Quader am Punkt y mit Volumen

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n$$

wird durch ψ^{-1} auf ein infinitesimales Parallelepiped am Punkt $\psi^{-1}(y)$, das von den Vektoren

$$\frac{\partial \psi^{-1}(y)}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

aufgespannt wird. Das Volume dieses parallelepiped ist

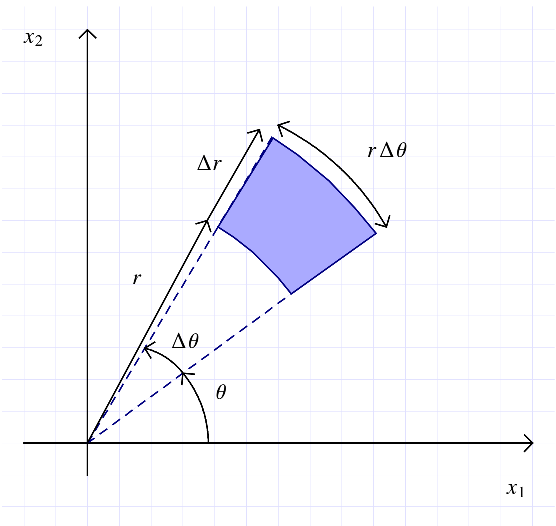
$$\left|\det\left(\frac{\partial \psi^{-1}(y)}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1, \cdots \frac{\partial \psi^{-1}(y)}{\partial y_n}\mathrm{d}y_n\right)\right| = |\det(D\psi^{-1}(y))|\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n.$$

Beispiel. (Züruck zum letzen Beispiel) $\forall f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschkränkt und stetig.

$$\mathbb{E}[f(Z)] = \mathbb{E}[f(X^2+Y^2)] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 f(x_1^2+x_2^2) \frac{e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}}{(2\pi)}$$

<u>Polare koordinaten</u>:

$$\psi: (x_1, x_2) \mapsto (r, \theta) \in D = \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi), \qquad r = (x_1 + x_2)^{1/2}, \quad \theta = \text{Winkel}$$



$$\psi^{-1}(r, \theta) = (x_1, x_2), \qquad \begin{cases} x_1 = r\cos(\theta) \\ x_2 = r\sin(\theta) \end{cases},$$

$$\left(\frac{\partial \psi^{-1}(r,\theta)}{\partial r}, \frac{\partial \psi^{-1}(r,\theta)}{\partial \theta}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\det(D\psi^{-1}(r,\theta)) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix}$$

$$= r$$

$$\boxed{\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r}$$

$$\mathbb{E}[f(Z)] = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1^2+x_2^2) \frac{e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}}{(2\pi)} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_{[0,2\pi)\times\mathbb{R}_+} \frac{e^{-r^2/2}}{(2\pi)} f(r^2) r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta}_{=2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-r^2/2}}{(2\pi)} f(r^2) r \mathrm{d}r = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-r^2/2} f(r^2) r \mathrm{d}r \underset{z=r^2}{=} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-z/2}}{2} f(z) \underbrace{\mathrm{d}z}_{=2r\mathrm{d}r} = \int_{\mathbb{R}} f(z) \rho_Z(z) \mathrm{d}z.$$

Dann die Dichte von $Z = X^2 + Y^2$ ist gegeben durch

$$\rho(z) = \frac{e^{-z/2}}{2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z),$$

dass ist $Z \sim \mathrm{Exp}(1/2)$.

Bemerkung. Allgemeiner: Seien $X_1, \ldots, X_n$ iid $\mathcal{N}(0,1)$ Z.V. Die Dichte von

$$Z = X_1^2 + \cdots + X_n^2$$

ist

$$\rho_n(z) = \frac{e^{-z/2} z^{n/2-1}}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}} \mathbb{1}_{z \geqslant 0} \tag{1}$$

wobei

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t,$$

ist die Gammafunktion. Die Dichte (1) der sogenannte χ_n^2-Verteilung (wichtig für Statistik).

Intuitiv:

$$\mathbb{E}[f(Z)] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \frac{e^{-(x_1^2 + \cdots + x_n^2)/2}}{(2\pi)^{n/2}} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} f(r^2) \frac{e^{-r^2/2}}{(2\pi)^{n/2}} C_n r^{n-1} \mathrm{d}r$$

wobei, mit $V_n(r)$ =Volumen einer Kugel mit dem Radius r in n Dimensionen,

$$V_n(r) = C_n r^n, \qquad V_n(r + \Delta r) - V(r) = C_n r^{n-1} \Delta r + o(\Delta r).$$

Dann mit $z = r^2$, $\mathrm{d}z = 2r\mathrm{d}r$

$$\mathbb{E}[f(Z)] = \frac{C_n}{2(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_+} f(z) e^{-z/2} z^{n/2-1} \mathrm{d}z$$

und mit $f(z) = 1$,

$$1 = \mathbb{E}[f(Z)] = \frac{C_n}{2(2\pi)^{n/2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+} e^{-z/2} z^{n/2-1} \mathrm{d}z}_{=: 2^{n/2}\Gamma(n/2)}$$

Dann

$$C_n = \frac{2(2\pi)^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}$$

und

$$\mathbb{E}[f(Z)] = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_{\mathbb{R}_+} f(z) e^{-z/2} z^{n/2-1} \mathrm{d}z.$$

Wir wissen dass $\phi_X \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{P}_X$. Man konnte hoffen, dass falls $\phi_{X_1}, \phi_{X_2}, \ldots$ konvergiert gegen die char. Fkt. von X, dann auch $X_1, X_2, \ldots$ konvergiert (schwach) gegen X.

Satz 11. *Seien $X_1, X_2, \ldots$ Z.V. mit char. Fkt. $\phi_1, \phi_2, \ldots$ Falls*

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei ϕ die char. Fkt. einer Z.V. X ist, dann $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{\mathscr{D}}{=\!=} X$.

(Das beweisen wir am Freitag)