Vorlesung 21 | 22.1.2021 | 10:15–12:00 via Zoom

7 Der zentrale Grenzwertsatz (fortsetzung)

(Kapitel 7 in Bovier Skript)

7.2 Charakteristiche Funktionen

Erinnerung von die letze Vorlesung.

Beispiel. Seien $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ unabhängige Z.V.. Dann

$$Z = X^2 + Y^2 \sim \mathrm{Exp}(1/2).$$

Satz 10. *(Transformationssatz von Integralen)*

a) *Eindimensionale: Sei $X: \Omega \to D \subseteq \mathbb{R}$ ein Z.V. mit absolut Stetiger Verteilung, ρ_X die Dichte. Sei*

$$\phi : D \to \mathbb{R}$$

stetig differentierbar mit $\phi'(x) \neq 0$ $\forall x \in D$. Dann $\phi(X): \Omega \to \phi(D)$ hat Dichte

$$\rho_{\phi(X)}(y) = \rho_X(\phi^{-1}(y)) \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \phi^{-1}(y) \right| \mathbb{1}_{y \in \phi(D)}.$$

b) *Mehrdimensionale: Seien $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$, $X: \Omega \to S$ eine Z.V. mit absolut stetiger Verteilung μ_X mit Dichte ρ_X. Sei $\psi: S \to T$ ein Diffeomorphismus C^1 mit $\det \mathrm{D}\psi(x) \neq 0$, $\forall x \in S$. Dann ist die Verteilung von $\psi(X)$ absolut stetig (bzgl. Lebesgue in $\mathbb{R}^n$) mit Dichte*

$$\rho_{\psi(X)}(y) = \rho_X(\psi^{-1}(y)) |\det(D\psi^{-1}(y))| \mathbb{1}_{y \in \psi(D)}$$

wobei

$$\det(D\psi^{-1}(y)) = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)_{i,j=1,\ldots,n}, \qquad x = \psi^{-1}(y).$$

Bemerkung. Allgemeiner: Seien $X_1, \ldots, X_n$ iid $\mathcal{N}(0,1)$ Z.V. Die Dichte von

$$Z = X_1^2 + \cdots + X_n^2$$

ist

$$\rho_n(z) = \frac{e^{-z/2} z^{n/2-1}}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}} \mathbb{1}_{z \geqslant 0} \tag{1}$$

wobei

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \mathrm{d}t,$$

ist die Gammafunktion. Die Dichte (1) der sogennante χ_n^2-Verteilung (wichtig für Statistik).

Intuitiv:

$$\mathbb{E}[f(Z)] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \frac{e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)/2}}{(2\pi)^{n/2}} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} f(r^2) \frac{e^{-r^2/2}}{(2\pi)^{n/2}} C_n r^{n-1} \mathrm{d}r$$

wobei, mit $V_n(r)$ =Volumen einer Kugel mit dem Radius r in n Dimensionen,

$$V_n(r) = C_n r^n, \qquad V_n(r+\Delta r) - V(r) = C_n r^{n-1}\Delta r + o(\Delta r).$$

Dann mit $z = r^2$, $\mathrm{d}z = 2r\mathrm{d}r$

$$\mathbb{E}[f(Z)] = \frac{C_n}{2(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_+} f(z) e^{-z/2} z^{n/2-1} \mathrm{d}z$$

und mit $f(z) = 1$,

$$1 = \mathbb{E}[f(Z)] = \frac{C_n}{2(2\pi)^{n/2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+} e^{-z/2} z^{n/2-1} \mathrm{d}z}_{=:2^{n/2}\Gamma(n/2)}$$

Dann

$$C_n = \frac{2(2\pi)^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}$$

und

$$\mathbb{E}[f(Z)] = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_{\mathbb{R}_+} f(z) e^{-z/2} z^{n/2-1} \mathrm{d}z.$$

Heutige Vorlesung.

Wir wissen dass $\phi_X \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{P}_X$. Man konnte hoffen, dass falls $\phi_{X_1}, \phi_{X_2}, \ldots$ konvergiert gegen die char. Fkt. von X, dann auch $X_1, X_2, \ldots$ konvergiert (schwach) gegen X.

Satz 11. *Seien $X_1, X_2, \ldots$ Z.V. mit char. Fkt. $\phi_1, \phi_2, \ldots$ Falls*

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei ϕ die char. Fkt. einer Z.V. X ist, dann $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{\mathcal{D}}{=\!=} X$.

Bemerkung. Errinnerung: $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{\mathcal{D}}{=\!=} X$ (Kovergenz in Verteilung) bedeuted dass $\mathbb{P}_{X_n} \to \mathbb{P}_X$ schwach (d.h. schwach Konvergenz von die Verteilungen). Insbesondere, falls $X_n \overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} X$ dann

$$\phi_n(t) = \mathbb{E}[e^{itX_n}] \to \mathbb{E}[e^{itX}] = \phi(t).$$

Beweis. Sei $\mu_n = \mathbb{P}_{X_n}$ das Maß (oder die Verteilung) von X_n, μ das Maß von X. Z.z. $\mu_n \to \mu$ schawch, d.h. für alle stetigen, beschränkten Fkt. $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

Und die Annahme ist dat fru alle $t \in \mathbb{R}$ wir haben

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\mu_n(\mathrm{d}x) = \lim_{n\to\infty} \phi_{X_n}(t) = \phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\mu(\mathrm{d}x).$$

1. Schritt. Für g mit kompakten Träger. $\forall \sigma > 0$

$$\left|\int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \underbrace{\left|\int_{\mathbb{R}} (p_\sigma * g)\mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}} (p_\sigma * g)\mathrm{d}\mu\right|}_{(A)}$$

$$+\underbrace{\left|\int_{\mathbb{R}} (g - p_\sigma * g)\mathrm{d}\mu_n\right|}_{(B)} + \underbrace{\left|\int_{\mathbb{R}} (g - p_\sigma * g)\mathrm{d}\mu\right|}_{(C)}$$

mit

$$p_\sigma(x) = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} p_{1/\sigma}(t)\mathrm{d}t$$

die Dicht von eine $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

(A): Aus Schritt 2 von Beweis von Thm. 6:

$$\int_{\mathbb{R}} (p_\sigma * g)\mathrm{d}\mu_n = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu_n(y) g(x) p_\sigma(x-y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu_n(y) g(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} e^{iyt} p_{1/\sigma}(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x g(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu_n(y) e^{iyt}\right]}_{=\phi_n(t)} p_{1/\sigma}(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ixt} p_{1/\sigma}(t) \phi_n(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

Annhame gibt uns $\phi_n(t) \to \phi(t)$ punktweise. Dazu

$$|g(x)\, e^{-itx} p_{1/\sigma}(t) \phi_n(t)| \leqslant |g(x)| p_{1/\sigma}(t)$$

ist integrierbar bzlg. $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}t$, weil g hat kompakten Träger. Es folgt, wegen Dominierte Konv. dass

$$\int_{\mathbb{R}} (p_\sigma * g)\mathrm{d}\mu_n \to \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ixt} p_{1/\sigma}(t) \phi(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (p_\sigma * g)\mathrm{d}\mu$$

und $(A) \to 0$ als $n \to \infty$ (für alle $\sigma > 0$).

(B),(C):

$$\left|\int_{\mathbb{R}} (g - p_\sigma * g)\mathrm{d}\mu_n\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |g - p_\sigma * g| \mathrm{d}\mu_n.$$

Für $\varepsilon > 0$ wähle σ klein genug s.d.

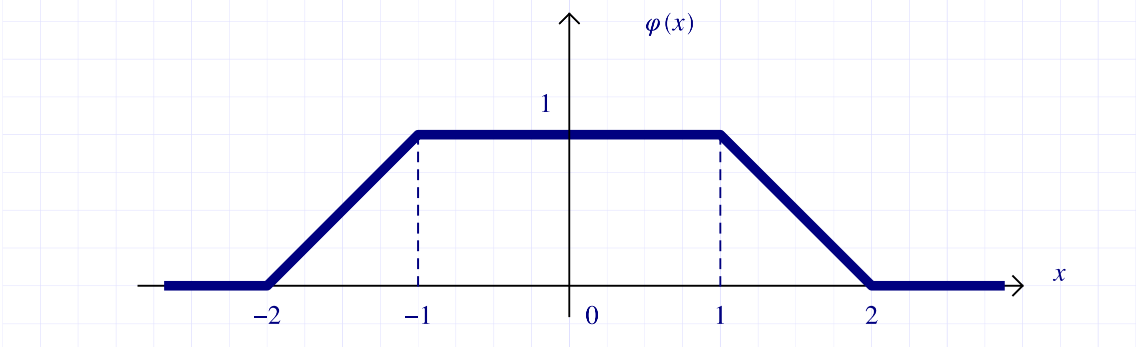
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |(p_\sigma * g)(x) - g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

und danach n gross genug (abhang. von σ, ε) s.d. $|(A)| \leqslant \varepsilon/3$. Dann für alle $\varepsilon > 0$ und n gross genug

$$\left|\int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \varepsilon$$

d.h. $\int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\mu_n \to \int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\mu$ als $n \to \infty$.

2. Schritt. Erweiterung auf beschränkten stetigen g (nich mit kompakter Träger). Sei g stetig, beschränkt. Definierte ein stetig Fkt $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ wie folgt



und setze

$$g_m(x) = g(x)\varphi(x/m):$$

stetig, gleich Null für $|x| \geqslant 2m$. Dann

$$\left|\int g\,\mathrm{d}\mu_n - \int g\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \left|\int g_m \mathrm{d}\mu_n - \int g_m\,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int g\mathrm{d}\mu_n - \int g_m\,\mathrm{d}\mu_n\right| + \left|\int g\mathrm{d}\mu - \int g_m\,\mathrm{d}\mu\right|$$

$$\leqslant \left|\int g_m \mathrm{d}\mu_n - \int g_m\,\mathrm{d}\mu\right| + \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|}_{=:K<\infty} \left\{\mu_n(|x|>m) + \mu(|x|>m)\right\}$$

weil $|g(x) - g_m(x)| = |g(x)||1 - \varphi(x/m)| \leqslant |g(x)|\,\mathbb{1}_{|x|>m}$. Wähle m gross genug s.d.

$$\mu(|x|>m) \leqslant \varepsilon/4K$$

und dann n gross genug s.d. (wegen Schritt. 1)

$$\begin{cases} |\mu_n(|x|>m) - \mu(|x|>m)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4K} \\ |\int g_m \mathrm{d}\mu_n - \int g_m\,\mathrm{d}\mu| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \end{cases}$$

Dann

$$\left|\int g\mathrm{d}\mu_n - \int g\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + K\left\{\frac{\varepsilon}{4K} + \frac{\varepsilon}{4K} + \frac{\varepsilon}{4K}\right\} \leqslant \varepsilon.$$

□

7.3 Der zentrale Grenzwertsatz

(Central limit theorem (CLT) auf English)
Seien $X_1, X_2, \ldots$ iid Z.V. mit $\mathbb{E}(X_k) = 0$ und char Fkt. ϕ. Sei

$$Z_n = \frac{1}{n^\gamma}\sum_{k=1}^n X_k.$$

Lemma 5(c) gibt

$$\phi_{Z_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itZ_n}] = \mathbb{E}[e^{itn^{-\gamma}\sum_{k=1}^n X_k}] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[e^{itn^{-\gamma}X_k}] = \left[\phi\left(\frac{t}{n^\gamma}\right)\right]^n.$$

Für De Moivre-Laplace Problem: $\gamma = 1/2$ und

$$\lim_{n\to\infty}\phi_{Z_n}(t) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t^2\right)$$

für einen $0 < \sigma < \infty$.

Lemma 12. *Sei $\phi \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ mit $\phi(0) = 1$, $\phi'(0) = 0$. Dann*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\phi\left(\frac{t}{n^{1/2}}\right)\right]^n = \exp\left(\frac{1}{2}\phi''(0)t^2\right), \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Beweis. Taylor Formel gibt

$$\phi(s) = 1 + \phi''(0)\frac{s^2}{2} + R(s), \qquad \text{wobei } \frac{R(s)}{s^2} \to 0 \text{ als } s\to 0.$$

Dann für alle $t\in\mathbb{R}$:

$$\left[\phi\left(\frac{t}{n^{1/2}}\right)\right]^n = \left[1 + \frac{1}{n}\phi''(0)\frac{t^2}{2} + R\left(\frac{t}{n^{1/2}}\right)\right]^n$$

$$= \exp\left[n\log\left(1 + \frac{1}{n}\phi''(0)\frac{t^2}{2} + \underbrace{R\left(\frac{t}{n^{1/2}}\right)}_{o(t^2/n)}\right)\right]$$

$$=\exp\left[n\left(\frac{1}{n}\phi''(0)\frac{t^2}{2}+R\left(\frac{t}{n^{1/2}}\right)+o_n(1/n)\right)\right]$$

weil $\log(1+x)=x+o(x)$. Dann

$$\left[\phi\left(\frac{t}{n^{1/2}}\right)\right]^n=\exp\left[\phi''(0)\frac{t^2}{2}+\underbrace{n\,o_n(1/n)}_{\to 0}\right]\to\exp\left[\phi''(0)\frac{t^2}{2}\right].$$

□

Satz 13. *(CLT) Seien $X_1, X_2, \dots$ iid Z.V. mit $\mathbb{E}[X_k]=\mu$, $\mathrm{Var}(X_k)=\sigma^2<\infty$. Dann konvergiert*

$$Z_n=\frac{1}{n^{1/2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(X_k-\mu)}{\sigma}$$

in Verteilung gegen eine $\mathcal{N}(0,1)$ Z.V.,

$$Z_n\xrightarrow{\mathscr{D}}\mathcal{N}(0,1)$$

d.h. für $s\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\frac{1}{n^{1/2}\sigma}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)\leqslant s\right)=\int_{-\infty}^{s}\frac{e^{-x^2/2}}{(2\pi)^{1/2}}\mathrm{d}x.$$

Beweis. OBdA $\mu=0$, $\sigma=1$ weil die Z.V $\tilde{X}_k=\frac{(X_k-\mu)}{\sigma}$ hat $\tilde{X}_k=0$ und $\mathrm{Var}(\tilde{X}_k)=1$. $\mathrm{Var}(X_k)=1<\infty\Rightarrow\phi\in C^2$. Aus Lemma 12,

$$\phi_{Z_n}(t)\to\exp\left(\frac{\phi''(0)}{2}t^2\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$$

konvergiert gegen $e^{-t^2/2}$ (weil $-\phi''(0)=\mathbb{E}[X_k^2]=\mathrm{Var}(X_k)=1$).

Wegen Lemma 7 $e^{-t^2/2}$ is die char. Fkt. eine $\mathcal{N}(0,1)$ Z.V.

Dann Satz 11 sagt uns, dass $(Z_n)_n$ konvergiert in Verteilung gegen eine Z.V. mit char. Fkt. $e^{-t^2/2}$, d.h. $\mathcal{N}(0,1)$. □

Wir haben das folgende schema gezeigt:

$$\begin{array}{cccccc}
 & F_X & \xleftrightarrow{1:1} & \mathbb{P}_X & \xleftrightarrow{1:1} & \phi_X\\
n\to\infty & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow\\
 & F_{X_n} & \xleftrightarrow{1:1} & \mathbb{P}_{X_n} & \xleftrightarrow{1:1} & \phi_{X_n}
\end{array}$$

7.4 CLT unter Lindenberg Bedingungen

Wir haben CLT unter iid voraussetzung. Gilt es auch wenn die Z.V. unabhängig aber nicht identisch-Verteilt sind?

Satz 14. *(Levy-Lindenberg CLT) Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Z.V. mit $\mathbb{E}(X_k)=0$, $\mathrm{Var}(X_k)=\sigma_k^2<\infty$. Setze*

$$v_n=\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2.$$

Falls $\forall\varepsilon>0$

$$\frac{1}{v_n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(|X_k|\geqslant\varepsilon v_k^{1/2}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

dann

a)

$$\frac{1}{v_n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k^2\longrightarrow 0 \quad \textit{als } n\to\infty,$$

b)

$$\frac{1}{v_n^{1/2}}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} \mathcal{N}(0,1).$$

(Ohne Beweis)

Bemerkung. Es gibt auch CLT für Fälle wo die X_k nicht unabhängig sind, aber es ist stoff für weitere Vorlesungen…

Nachste Woche: Stabile Verteilungen (Prüfungrelevant) + Etwas von Stastistik (nicht Prüfungrelevant).

Bemerkung 15. Warum wir können wahlen σ klein genug so dass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|(p_\sigma * g)(x)-g(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3},$$

oben? Wir haben

$$(p_\sigma * g)(x)-g(x)=\int_{\mathbb{R}} p_\sigma(x-y)[g(y)-g(x)]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\mathbb{R}} p_1\left(\frac{x-y}{\sigma^{1/2}}\right)[g(y)-g(x)]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\mathbb{R}} p_1(y)[g(x+\sigma^{1/2}y)-g(x)]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{|y|\geqslant\delta} p_1(y)[g(x+\sigma^{1/2}y)-g(x)]\mathrm{d}y+\int_{|y|<\delta} p_1(y)[g(x+\sigma^{1/2}y)-g(x)]\mathrm{d}y$$

$$\left|\int_{|y|\geqslant\delta} p_1(y)[g(x+\sigma^{1/2}y)-g(x)]\mathrm{d}y\right|\leqslant 2\left[\sup_x|g(x)|\right]\left(\int_{|y|\geqslant\delta} p_1(y)\mathrm{d}y\right)$$

$$\left|\int_{|y|<\delta} p_1(y)[g(x+\sigma^{1/2}y)-g(x)]\mathrm{d}y\right|\leqslant \sup_{y,x:|x-y|\leqslant\sigma^{1/2}\delta}|g(x)-g(y)|$$

Wir nehmen δ groß so dass

$$2\left[\sup_x|g(x)|\right]\left(\int_{|y|\geqslant\delta} p_1(y)\mathrm{d}y\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{6},$$

und dann wir wahlen σ klein so dass

$$\sup_{y,x:|x-y|\leqslant\sigma^{1/2}\delta}|g(x)-g(y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{6},$$

Dass ist möglich weil g ist gleichmässig stetig.