Vorlesung 22 | 26.1.2021 | 14:15–16:00 via Zoom

7 Der zentrale Grenzwertsatz (Ende)

(Kapitel 7 in Bovier Skript)

Erinnerung an die letze Vorlesung

Satz 11. *Seien $X_1, X_2, \ldots$ Z.V. mit char. Fkt. $\phi_1, \phi_2, \ldots$ Falls*

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n(t) = \phi(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei ϕ die char. Fkt. einer Z.V. X ist, dann $\lim_{n \to \infty} X_n \overset{\mathcal{D}}{=\!=} X$.

Lemma 12. *Sei $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ mit $\phi(0) = 1$, $\phi'(0) = 0$. Dann*

$$\lim_{n \to \infty} \left[\phi\left(\frac{t}{n^{1/2}} \right) \right]^n = \exp\left(\frac{1}{2} \phi''(0) t^2 \right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Satz 13. *(CLT) Seien $X_1, X_2, \ldots$ iid Z.V. mit $\mathbb{E}[X_k] = \mu$, $\mathrm{Var}(X_k) = \sigma^2 < \infty$. Dann konvergiert*

$$Z_n = \frac{1}{n^{1/2} \sigma} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)$$

in Verteilung gegen eine $\mathcal{N}(0,1)$ Z.V., d.h. für $s \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{n^{1/2} \sigma} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu) \leqslant s \right) = \int_{-\infty}^{s} \frac{e^{-x^2/2}}{(2\pi)} \mathrm{d}x.$$

Heutige Vorlesung

Beispiel. Sei $X_n \sim \mathcal{U}([-n, n])$ dann für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\phi_n(t) = \phi_{X_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_n}] = \int_{-n}^{n} e^{itx} \frac{\mathrm{d}x}{2n} = \frac{1}{2n} \frac{e^{itx}}{it} \bigg|_{t=-n}^{t=n} = \frac{e^{itn} - e^{-itn}}{2itn}, \qquad t \neq 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n(t) = \phi(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \neq 0, \\ 1, & \text{falls } t = 0. \end{cases}$$

Aber Satz 11 gilt nicht hier, weil ϕ ist nicht eine char. Fkt., d.h. keine Z.V. X hat ϕ als char. Fkt. (z.B. ϕ ist nicht stetig). Die Problem ist: die Folge $(X_n)_n$ convergiert nicht (in Verteilung).

Wir haben für alle $L > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n \in [-L, L]) = \lim_{n \to \infty} \frac{L}{n} = 0.$$

7.5 Stabile Verteilungen

Seien $X_1, X_2, \ldots \in \mathscr{L}^1$ i.i.d. Z.V. (mit $\mathbb{E}[X_k] = \mu$) Sei

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Frage: Wenn

$$\xi_n := \frac{S_n - \mu n}{n^\gamma} \tag{1}$$

konvergiert, als $n \to \infty$, gegen eine nich triviale Z.V.? (d.h. nicht 0 oder $\pm\infty$).
Aus CLT: falls $\mathrm{Var}(X_k) = \sigma^2 < \infty \Rightarrow \gamma = 1/2$ und

$$\frac{S_n - \mu n}{n^{1/2}\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} \mathcal{N}(0,1).$$

Aufgabe. Zeigen dass falls $\mathrm{Var}(X_k) < \infty$ und $\gamma > 1/2$ dann $\xi_n \to 0$ in W-keit (und dann in Verteilung).

Welche andere Möglichkeiten gibt es falls $\mathrm{Var}(X_k) = +\infty$?
Sei $p \in (0,1)$, setze

$$n = \underbrace{\lfloor pn \rfloor}_{=:p_n} + \underbrace{(n - \lfloor pn \rfloor)}_{=:q_n}.$$

Wir haben $p_n/n \to p$ und $q_n/n \to q := 1-p$ als $n \to \infty$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{p_n} X_k + \sum_{k=1}^{q_n} \tilde{X}_k, \qquad \tilde{X}_k = X_{p_n+k}.$$

$(X_k)_{k=1,\ldots,p_n}$ und $(\tilde{X}_k)_{k=1,\ldots,q_n}$ sind unbhängig. Unter Skalierung (1), erhalten wir (OBdA $\mu = 0$)

$$\xi_n = \boxed{\frac{S_n}{n^\gamma}} = p^\gamma \frac{1}{(pn)^\gamma} \sum_{k=1}^{p_n} X_k + q^\gamma \frac{1}{(qn)^\gamma} \sum_{k=1}^{q_n} \tilde{X}_k = p^\gamma \underbrace{\frac{p_n^\gamma}{(pn)^\gamma}}_{\to 1} \boxed{\frac{\sum_{k=1}^{p_n} X_k}{p_n^\gamma}} + q^\gamma \underbrace{\frac{q_n^\gamma}{(qn)^\gamma}}_{\to 1} \boxed{\frac{\sum_{k=1}^{q_n} \tilde{X}_k}{q_n^\gamma}}$$

Falls $\xi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} Z$, wir haben auch $\frac{\sum_{k=1}^{p_n} X_k}{p_n^\gamma} \xrightarrow{\mathscr{D}} Z$, $\frac{\sum_{k=1}^{q_n} \tilde{X}_k}{q_n^\gamma} \xrightarrow{\mathscr{D}} Z$ gegen die dasselbe Verteilung.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\frac{S_n}{n^\gamma}} & \approx & p^\gamma \boxed{\frac{\sum_{k=1}^{p_n} X_k}{p_n^\gamma}} & + & q^\gamma \boxed{\frac{\sum_{k=1}^{q_n} \tilde{X}_k}{q_n^\gamma}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z & = & p^\gamma Z_1 & + & q^\gamma Z_2 \end{array} \qquad p+q=1, p,q \geqslant 0.$$

wobei $Z_1, Z_2, \ldots \sim Z$ und unabhängig sind. Sei ϕ_Z die char. Fkt. von Z. Dann

$$\phi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{itZ}] = \mathbb{E}[e^{it(p^\gamma Z_1 + q^\gamma Z_2)}] \underset{\text{unabh.}}{=\!=} \mathbb{E}[e^{itp^\gamma Z_1}]\mathbb{E}[e^{itq^\gamma Z_2}] = \phi_Z(p^\gamma t)\phi_Z(q^\gamma t), \tag{2}$$

für alle $t \in \mathbb{R}, p, q \in (0,1)$ s.d. $p+q=1$.

Beispiel. $\gamma = 1/2$ und $\phi_Z(t) = \exp(-t^2/2)$:

$$\phi_Z(p^\gamma t)\phi_Z(q^\gamma t) = \exp(-p^{2\gamma}t^2/2)\exp(-q^{2\gamma}t^2/2) = \exp(-(p+q)t^2/2) = \exp(-t^2/2) = \phi_Z(t),$$

mit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$\gamma = 1$ und $\phi_Z(t) = \exp(-a|t|)$

$$\phi_Z(p^\gamma t)\phi_Z(q^\gamma t) = \exp(-ap^\gamma|t|)\exp(-aq^\gamma|t|) = \exp(-a|t|) = \phi_Z(t).$$

mit $Z \sim \mathrm{Cauchy}(a)$. Sie haben auch

$$\mathrm{Cauchy}(a) + \mathrm{Cauchy}(a) = \mathrm{Cauchy}(2a)$$

$$\frac{\mathrm{Cauchy}(a) + \mathrm{Cauchy}(a)}{2} = \mathrm{Cauchy}(a)$$

Schauen wir uns ein konkrete Fall:

Lemma 15. *Seien $\alpha \in (1,2)$, $R \in (0,\infty)$. Seien $X_1, X_2, \ldots$ iid Z.V. mit absolut stetigen Verteilungen und Dichtefunktionen*

$$\rho(x) = C\frac{1}{|x|^{\alpha+1}}, \qquad \text{wenn } |x| \geqslant R.$$

Dann $X_k \in \mathscr{L}^1$ aber $X_k \notin \mathscr{L}^2$, und $\phi_{X_k} \notin C^2$ und

$$\phi_{X_k}(t) = 1 + imt - c|t|^\alpha + O(t^2),$$

für $t \to 0$, mit $m = \mathbb{E}[X_k]$ und

$$c := C\int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(u)}{|u|^{\alpha+1}}\mathrm{d}u \in (0,\infty).$$

Beweis. Für $t \neq 0$,

$$\phi_{X_k}(t) - 1 - imt = \int_{\mathbb{R}} \rho(x)(e^{itx} - 1 - itx)\mathrm{d}x$$

$$= C\int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{itx} - 1 - itx)}{|x|^{1+\alpha}}\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\rho(x) - C\frac{1}{|x|^{\alpha+1}}\right)}_{=0,\text{für } |x|\geqslant R}(e^{itx} - 1 - itx)\mathrm{d}x$$

$$= C\int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{itx} - 1 - itx)}{|x|^{1+\alpha}}\mathrm{d}x + \int_{-R}^{R} \left(\rho(x) - C\frac{1}{|x|^{\alpha+1}}\right)\underbrace{(e^{itx} - 1 - itx)}_{O(t^2x^2)\text{ für } t\to 0}\mathrm{d}x$$

$$= C\int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{itx} - 1 - itx)}{|x|^{1+\alpha}}\mathrm{d}x + O(t^2)$$

$$\underset{u=xt}{=\!=\!=} C|t|^\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{iu} - 1 - iu)}{|u|^{1+\alpha}}\mathrm{d}u + O(t^2)$$

$$\underset{\text{sym.}}{=\!=\!=} C|t|^\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{(\cos(u) - 1)}{|u|^{1+\alpha}}\mathrm{d}u + O(t^2)$$

□

Es folgt, dass für

$$\tilde{S}_n := \sum_{k=1}^n X_k - mn,$$

$$\phi_{\tilde{S}_n}(t) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k - m}(t) = (1 - c|t|^\alpha + O(t^2))^n$$

$$\phi_{n^{-1/\alpha}\tilde{S}_n} = (1 - c|n^{-1/\alpha}t|^\alpha + O(n^{-2/\alpha}t^2))^n = (1 - n^{-1}c|t|^\alpha + n^{-2/\alpha}O(t^2))^n \to \exp(-c|t|^\alpha), \qquad n \to \infty.$$

Satz 11 und diese Rechnung implizieren

Folgerung 16. *Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d Z.V. wie in Lemma 15. Dann,*

$$n^{-1/\alpha}\tilde{S}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{D}} \mu_{c,\alpha}$$

wobei $\mu_{c,\alpha}$ ist die Verteilung mit char Fkt

$$\phi_{c,\alpha}(t) = \exp(-c|t|^\alpha).$$

Definition 17. *Seien $\alpha \in (0,2]$, $m \in \mathbb{R}$, Die W-maße mit char. Fkt.*

$$\phi(t) = e^{imt - c|t|^\alpha}$$

$c \in (0,\infty)$ heißen symmetrische α-stabile Verteilungen mit Mittelwert m.

Beispiel. $\mathscr{N}(0,1)$ und Cauchy(a) sind stabile Verteilungen mit $\alpha = 2$ und $\alpha = 1$.

Bemerkung. Bis auf $\alpha = 1$ (Cauchy) und $\alpha = 2$ (Gauss) sind die α-stabile Verteilungen nich sehr explizit. Aber für $|x| \to \infty$ fallen deren Dichte wie $|x|^{-1-\alpha}$ ab. Es gibt Verallgemeinerungen für den nicht symmetrische Fall auch.

Lemma 18. *Falls $Z_1, Z_2 \sim \mu_{c,\alpha}$ sind α-stabile und unab. dann*

$$Z = p^\gamma Z_1 + q^\gamma Z_2$$

mit $\gamma = 1/\alpha$ ist auch verteilt als $\mu_{c,\alpha}$.

Beweis. Wir haben $\gamma\alpha = 1$ so

$$\phi_Z(t) = \phi_{Z_1}(p^\gamma t)\phi_{Z_2}(q^\gamma t) = \exp(-cp^{\gamma\alpha}|t|^\alpha)\exp(-cq^{\gamma\alpha}|t|^\alpha) = \exp(-c(p+q)|t|^\alpha) = \exp(-c|t|^\alpha)$$

d.h. $Z \sim \mu_{c,\alpha}$ und dann $Z \sim Z_1 \sim Z_2$. □
