Vorlesung 3 – 3.11.2020 – 14:15-16:00 via Zoom

*Organisatorische Angelegenheiten*

- Alle Übungsgruppen online stattfinden! (aufgrund der neuen COVID-Situation)
- Da jetzt alle Tutorien online stattfinden bitten wir Sie sich gleichmäßig auf die Übungsgruppen zu verteilen, um die Anzahl der Korrekturen pro Tutor ungefähr gleich zu halten.
  - Wir öffnen die Übungsgruppen für alle, sodass sie trotzdem unabhängig von der Anmeldung in einer Gruppe jede beliebige andere Veranstaltung besuchen können.
  - Die Anmeldung in der jeweiligen Gruppe ist also nur für die Abgabe der Übungsblätter relevant.
  - Jede Übungsgruppe sollte im Schnitt 20 Teilnehmer umfassen. Wir haben aktuell die maximale Teilnehmerzahl pro Gruppe auf 50 begrenzt. Ecampus zeigt Ihnen die ``freien Plätze" pro Gruppe an. Damit können Sie errechnen wie viele Plätze in der Gruppe bereits belegt sind. Ziel ist es also, dass in jeder Übungsgruppe noch 30 Plätze „frei“ sind.
  - Sollte sich innerhalb der nächsten Woche zwischen den Übungsgruppen keine Gleichverteilung einstellen werden wir leere Übungsgruppen zufällig auffüllen. Wenn sie also bereits eine Abgabegruppe gefunden haben, die Sie erhalten wollen sollten sie möglichst in noch leere Übungsgruppen wechseln.
- Zusätzlich wird es ab kommender Woche eine weitere Übungsgruppe geben. Diese findet Dienstags 16-18 Uhr statt. Diese wird in kürze online gehen. Auch da können Sie sich dann anmelden.

Erinnerung: eine $\sigma$-Algebra ist ein Mengensystem dass $\emptyset$ enhält und dass unter Komplementen und anzählbare Vereinigung geschlossen ist.

**Definition 1.** *Für eine Menge-Systeme $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ von Teilmengen von $\Omega$ definiert man $\sigma(\mathscr{E})$, die von $\mathscr{E}$ erzeugte $\sigma$-Algebra, als die* ***kleinste*** *$\sigma$-algebra die $\mathscr{E}$ enthält, d.h.*

$$\sigma(\mathscr{E}) = \cap\{\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega) : \mathscr{F} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra und } \mathscr{E} \subset \mathscr{F}\}$$

*$\mathscr{E}$ ist ein Erzeuger von $\sigma(\mathscr{E})$.*

Es folgt:

- $A_n \in \mathscr{E}$ fur alle $n \geqslant 1 \Rightarrow \cup_{n \geqslant 1} A_n \in \sigma(\mathscr{E})$

- $A \in \mathscr{E} \Rightarrow A^c \in \sigma(\mathscr{E})$

**Bemerkung.**

- Intuitiv repräsentiert $\sigma(\mathscr{E})$ alle möglichen Ereignisse (oder gleichwertig, Fragen), die man mit denen in $\mathscr{E}$ konstruieren kann.
- In Allgemein kann ziemlich komplex sein, um $\sigma(\mathscr{E})$ genau zu beschreiben. (oder praktisch unmöglich)

**Frage.** $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. $\sigma(\{\{1,2,3\}\}) = ?$

a) $\{\emptyset, \{1,2,3\}, \Omega\}$

b) $\{\emptyset, \{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \Omega\}$ (correkt)

c) $\{\emptyset, \{1,2,3\}, \{4,5\}, \{4,5,6\}, \Omega\}$

d) $\{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}\}$

**Frage.** $\sharp\sigma(\{\{1\}, \{4,5\}\}) = ?$

a) 4

b) 6

c) 8

Antwort: $\sigma(\{\{1\},\{4,5\}\}) = \sigma(\{\{1\},\{2,3,6\},\{4,5\}\})$. $\{\{1\},\{2,3,6\},\{4,5\}\}$ Partition von $\Omega$ ist, dann $\sharp\sigma(\{\{1\},\{2,3,6\},\{4,5\}\}) = 2^3 = 8$)

**Frage.** Sei $\Omega = [0,1]$ und $\mathscr{F} = \sigma(\{[0,1/2), \{3/4\}\})$. Welche der folgende Mengen $\mathscr{F}$ enthält?

a) $(3/4, 1]$ (nein)

b) $[1/2, 1] \setminus \{3/4\}$ (ok)

c) $(1/2, 1] \setminus \{3/4\}$ (nein)

**Bemerkung.**

- $A \subseteq \Omega$ dann $\sigma(A) = \sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.
- $\Pi = \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine Partition von $\Omega$, dann $\sigma(\Pi) =$ alle möglichen Vereinigungen der Mengen $A_1, \ldots, A_n$, d.h.

$$\sigma(\Pi) = \{\cup_{i:x_i=1} A_i : x \in \{0,1\}^n\}.$$

Dann $\sharp\sigma(\Pi) = 2^{\sharp\Pi} = 2^n$.

- Sei $\Omega$ uberabzälhbar und $\mathscr{G} = \{\{\omega\}: \omega \in \Omega\}$ (das System der ein-elementigen Teilmengen von $\Omega$). Zeigen Sie:

$$\sigma(\mathscr{G}) = \{A \subset \Omega: A \text{ oder } A^c \text{ ist abzälhbar}\}.$$

(Übung!)

**Definition 2.** *(Wahrscheinlichkeitmaße) Sei* $(\Omega, \mathscr{F})$ *ein Messraum und* $\mathbb{P}: \mathscr{F} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ *eine Abbildung mit*

*a)* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(Normierung)*

*b)* $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

*c) Falls* $A_n \in \mathscr{F}$, $n \geqslant 1$ *sind paarwise disjunkt (d.h.* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *für* $m \neq n$*), dann*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n), \qquad (\sigma\text{-Additivität})$$

*Dann ist* $\mathbb{P}$ *ein W-maß auf* $(\Omega, \mathscr{F})$. *Das Triple* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *ist W-raum gennant.*

**Bemerkung.**

- Für beliebige (abzählbare viele, nicht disjunkt) Ereignisse $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n), \qquad (\sigma\text{-Subadditivität}).$$

(Übung!)

**Definition 3.** *(Allgemeine Maße) Eine Abbildung* $\mu: \mathscr{F} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}$ *mit der Eigenschaften b) und c) aus Def. 2 heißt Maß auf* $(\Omega, \mathscr{F})$.

- *Falls* $\mu(\Omega) < \infty$, *dann* $\mu$ *ist ein endliches Maß; (* $\mu(A) \leqslant \mu(\Omega) < +\infty$*)*
- $\mu$ *heißt* $\sigma$*-endlich falls* $\exists$ *aufsteigende Folge* $(\Omega_n)_{n\geqslant 1}$, *mit* $\Omega_n \in \mathscr{F}$ *so dass* $\Omega = \cup_{n\geqslant 1}\Omega_n$ *und* $\mu(\Omega_n) < \infty$, *für alle* $n \geqslant 1$. *(wir können* $\mu(\Omega) = +\infty$ *haben)*

**Beispiel.** $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Für $A \in \mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ eine beilibige Teilmenge von $\Omega$, $\mu(A) = \sharp A$ ($\mu$ ist die Zahlmass auf $\Omega$) ist eines $\sigma$-endliches Maß (nehme $\Omega_n = \{1, \ldots, n\}$) aber ist kein W-maß und keine endliches Maß. $\mu(\Omega) = +\infty$.

**Beispiel.** Sei $(E, \mathscr{E})$ ein Messraum und sei $f_k: \mathscr{E} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ die Abbildung der Frequenzen der Ausgänge eines Spiels

$$f_k(A) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{x_i \in A}, \qquad A \in \mathscr{E},$$

wobei $x_i \in E$ den Ausgang des $i$-ten Spiels modelliert. Zeigen Sie, dass $f_k: \mathscr{E} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E, \mathscr{E})$ ist.

(Übung!) Das ist: Frequenz ist eine Spezialfall des Wahrscheinlichkeitsmaßes.

Der Grenzwert von $(f_k)_k$ als $k \to \infty$ (Unter der Annahme seiner Existenz) ist auch eine W-mass (wird später behandelt: Kovergenz von W-massen, Satz von Größen Zahlen).

**Beispiel.** Betrachten wir $\sharp\Omega < \infty$. Falls jedes Ergebnis vom Zufallsexperiment hat a-priori keinen Grund häufiger zu sein als andere, dann wird man die Gleichverteilung für $\mathbb{P}$ wählen, d.h.

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\sharp\Omega}, \qquad \omega \in \Omega.$$

Wir nennen $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Laplace-Raum.

**Beispiel.** (Fortsetzung) Betrachten wir einen Spiel wo man eine Münze gewurfelt wird $\left(\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(K) = \frac{1}{2}\right)$

- Spieler A wettet auf Kopf (K)
- Spieler B wettet auf Zahl (Z)
- Gewinnt wer zuerst 10 „Punkte“ erzieht.

Das Spiel wirt zur Stand A: 8Pkt, B: 7 Pkt unterbrochen.

**Frage:** Was ist die W-keit, dass $A$ gewinnt wenn man weiterspielt? (Annahme: Gliech-verteilung von Ergebnisse)

Hier sind zwei verschiedene Antworten, aber nur eine ist richtig. Welche?

*Antwort a)*: Nach 4-mal Werfen kennt man die Antwort mit sicherheit

$$\Rightarrow \Omega_1 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in \{0,1\}^4 \mid \omega_k = 1 \text{ falls } k\text{-te Ergebnis ist Kopf}, \omega_k = 0 \text{ sonst}\}$$

$$\text{„A gewinnt“} = \left\{\omega : \sum_{k=1}^{4} \omega_k \geqslant 2\right\} = A$$

$$\mathbb{P}_1(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}_1(\omega) = \frac{\sharp A}{\sharp\Omega}$$

Nun ist

$$A = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,1), (1,0,1,1), (0,1,1,1), \\ (1,1,0,0), (1,0,0,1), (0,0,1,1), (1,0,1,0), (0,1,0,1), (0,1,1,0) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_1(A) = \frac{11}{16}$$

*Antwort b):* Anders Ergebnisraum! (auch gut, wir können die wichtigen Ereignisse darstellen)

$$\Omega_2 = \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{(1,1),(1,0,1),(1,0,0,1),(0,1,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)}_{\text{„A gewwint"}}, \\ \underbrace{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0)}_{\text{„B gewwint"}} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_2(\tilde{A}) = \frac{\sharp\tilde{A}}{\sharp\Omega_2} = \frac{6}{10}$$

Wer hat Recht?

Scheinen wir ein andere Ereignis: $C = \{\text{Kopf beim ersten Wurf}\}$

$$\mathbb{P}_1(C) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \qquad \text{Korrekt!}$$

$$\mathbb{P}_2(C) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \qquad \text{Falsch!}$$

Denke darüber wo den Fehlen in Antwort 2 liegt.

Der folgende Satz gibt eine alternative Charakterisierung (/Bedeutung/Kosequenz) der $\sigma$-Additivität.

**Satz 4.** *($\sigma$-Additivität und monotone Stetigkeit) Sei $\mathscr{F}$ eine $\sigma$-Algebra und $\mu\colon \mathscr{F} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ additiv, d.h. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$. Dann*

*a) $\mu$ ist $\sigma$-additiv genau dann, wenn*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \Rightarrow \mu(\cup_{n\geqslant 1} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \quad \textit{(stetig von unter)}$$

*b) Gilt $\mu(\Omega) < \infty$, dann ist dies auch äquivalent zu:*

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \Rightarrow \mu(\cap_{n\geqslant 1} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \textit{(stetig von oben)}$$

**Beweis.** a) Sei $\mu$ $\sigma$-additiv und $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$. Die Mengen $B_1 := A_1$, $B_n := A_n \backslash A_{n-1}, n \geqslant 2$ sind disjunkt mit $\cup_{n\geqslant 1} B_n = \cup_{n\geqslant 1} A_n$ und $\cup_{k=1}^n B_k = \cup_{k=1}^n A_k = A_n$. Also gilt:

$$\mu(\cup_{n\geqslant 1} A_n) = \mu(\cup_{n\geqslant 1} B_n) \underset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{n\geqslant 1} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mu(\cup_{k=1}^n B_k) = \lim_{n\to+\infty} \mu(\cup_{k=1}^n A_k) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Der Beweis der umgekehrten Implikation wird als Übung überlassen.

b) Gilt $\mu(\Omega) < \infty$ dann folgt:

$$\mu(\cap_{n\geqslant 1} A_n) = \mu(\Omega \backslash (\cap_{n\geqslant 1} A_n)^c) = \mu(\Omega \backslash (\cup_{n\geqslant 1} A_n^c)) = \mu(\Omega) - \mu(\cup_{n\geqslant 1} A_n^c)$$

mit $A_1^c \subseteq A_2^c \subseteq A_3^c \cdots$. Die Behauptung folgt nun aus (a), weil

$$\mu(\cap_{n\geqslant 1} A_n) = \mu(\Omega) - \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n^c) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

□

# 1 W-keit auf endliche diskrete Mengen

(Erinnerung aus Alma II)

Betrachten wir $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$ (oder eine beliebige endliche Menge) und der Fall wo $\mathscr{F}$ enthält jedes Teilmenge von $\Omega \Rightarrow \mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$, die Potenzmenge von $\Omega$.

Dann jedes W-mass $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) \qquad \forall A \in \mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$$

errfült, wegen $A = \cup_{\omega\in A}\{\omega\}$ ist immer höchstens eine endliche Vereinigung disjunkter Mengen.

**Lemma 5.** *Sei $\Omega = \{1, \dots, N\}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}$ ein W-maß auf $(\Omega, \mathscr{F})$. Dann*

*a) Die Werte $\{\mathbb{P}(\{k\}), k \in \Omega\}$ definiert $\mathbb{P}$ eindeutig und $\sum_{k\in\Omega} \mathbb{P}(\{k\}) = 1$.*

*b) Jeder Wahl von $p_k \geqslant 0$, $k \in \Omega$ mit $\sum_{k\in\Omega} p_k = 1$ definiert ein W-maß auf $(\Omega, \mathscr{F})$ mit $\mathbb{P}(\{k\}) = p_k$.*

**Beweis.** (Einfach) □

**Bemerkung.**

- $\mathscr{F} = \sigma(\{\{1\}, \{2\}, \dots\})$ d.h. die Menge der ein-Punktigen Menge erzeugt $\mathscr{F}$.
- Die Def. von $\mathbb{P}$ auf $M = \{\{1\}, \{2\}, \dots\}$ genügt um $\mathbb{P}$ auf $\mathscr{F}$ zu bestimmen $\Rightarrow M$ ist *massbestimmend*.
- Es ist nicht nötig (/sinnvoll) immer $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ zu wählen!
- Die Gleichverteilung (Laplace model) ist die W-keit $\mathbb{P}$ definiert durch $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/\sharp\Omega$ für alle $\omega \in \Omega$.
- Was passiert für $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$? (unendlich) (Egal, aber $\sigma$-Additivität nich so trivial zu sehen)

**Beispiel.** Betrachten wir eine Roulette mit Bias, s.d. $\mathbb{P}(\text{gerade}) = 0.4$ und $\mathbb{P}(\text{ungerade}) = 0.6 \Rightarrow$ Ohne weitere Angaben/Annahmen

$$\mathscr{F} = \sigma(\{\text{gerade}\}, \{\text{ungerade}\}) \subsetneq \sigma(\{1\}, \{2\}, \dots, \{36\}) = \mathscr{P}(\Omega).$$

$\triangleright$ $\mathscr{F}$ die "verfügbaren Informationen" modellieren (oder, steht für).

## 2 W-maße auf $\mathbb{R}$

In der Realität können wir Größen nicht mit willkürlicher Genauigkeit messen, daher werden wir uns freuen, wenn wir (zumindest) über Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen der folgenden Form sprechen können

$$\{\omega \in \Omega : \omega \in (a,b)\} = (a,b)$$

für beliebige $a,b \in \mathbb{R}$.

Dies führt natürlich die sogennante Borel'sche $\sigma$-Algebra zu definieren.

**Definition 6.** *Die Borel'sche $\sigma$-Algebra $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ ist die **kleinste** $\sigma$-Algebra, die alle offene Intervalle enthält. Das ist*

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\{(a,b) : \forall a,b \in \mathbb{R}, a < b\}).$$

*Die Elemente von $\mathscr{B}$ heißen Borel Mengen.*

**Frage.** Welche der folgende Mengen $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ enthält?

a) $[0,1]$?

b) $(-\infty, x), x \in \mathbb{R}$?

c) $\{x\}, x \in \mathbb{R}$?

d) $\{x \in \mathbb{R} : |\sin(x)| < 0.2\}$?

Antwort: alles.

**Eigenschaften.** $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ enthält insbesondere:

a) alle offene Mengen,

b) alle abgeschlossene Mengen,

c) alle Punkte $\{x\}, x \in \mathbb{R}$,

d) alle kompakten Intervalle,

e) alle halb-offenen Intervallen und Halbachsen.

*Erinnerung:* eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist offene genau dann, wenn für alle Punkte $x \in A$ es gibt eine offene Kugel $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < \varepsilon\}$ mit mitte $x$ und radius $\varepsilon > 0$, die alle in A enthälten ist. Eine Menge $A$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $A^c$ offene ist.

**Bemerkung.** Allgemeiner wird die Borel'sche $\sigma$-Algebra als die $\sigma$-Algebra definiert, die von allen offenen Mengen erzeugt ist. Die beiden Definitionen sind äquivalent. Das ist

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{A \subseteq \mathbb{R}, A \text{ offenen}\}).$$

Beweis. Tatsächlich, sie $A \subseteq \Omega$ eine offenen Teilmenge von $\Omega$. Dann haben wir für jeden Punkt $x$ in $\Omega$ ein offenen Intervall $(a,b)$ mit rationalen Punkten, das es enthält und das in $A$ vollständig enthalten ist:

$$x \in (a,b) \subset A.$$

Also können wir schreiben

$$A = \cup\{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}, a < b, (a,b) \subseteq A\}.$$

Aber das ist eine abzählbar Verenigung von offener Intervalle, und dann es liegt in $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Dann $A \in \sigma(\{(a,b) : \forall a,b \in \mathbb{R}, a < b\})$ und $\sigma(\{A \subseteq \Omega, A \text{ offenen}\}) \subseteq \sigma(\{(a,b) : \forall a,b \in \mathbb{R}, a < b\})$. Die umgekehrte Einbeziehung ist trivial.

**Bemerkung.** In Allgemein sind $\Omega$ eine topologische Raum dann

$$\mathscr{B}(\Omega) = \sigma(\{A \subseteq \Omega, A \text{ offenen}\})$$

ist die Borel $\sigma$-Algebra von $\Omega$.

**Lemma 7.** *Die Mengen $H_x = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant x\}$ für $x \in \mathbb{R}$ erzeugen $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.*

**Beweis.** Übung. □

**Achtung:** $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{R})$!

<u>Gegenbeispiel ($\mathscr{B}(\mathbb{R}) \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$)</u>

Wir werden später zeigen, dass $\exists$ Maß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, das Lebesgue Maß (Leb), die analogue zur Gleichverteilung für $\Omega$ endlich ist. Das ist

- Translation-invariant: Sie $A + x = \{y + x : y \in A\} \subseteq \mathbb{R}$, mit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ dann

  $$\mathrm{Leb}(A + x) = \mathrm{Leb}(A),$$

  fur alle $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und alle $x \in \mathbb{R}$. (Übung: $A + x \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ wenn $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$)

- Für alle $a < b$:

  $$\mathrm{Leb}((a,b)) = \mathrm{Leb}([a,b]) = b - a.$$

Wir wöllen jetzt zeigen dass wir können eine Menge $A \subseteq \Omega$ zu definiern, s.d. $\mu(A)$ ist nicht „wohldefiniert“. (Skizze von Beweis)

a) Betrachten Sie eine Äquivalenzrelation auf $[0,1]$: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Dann können wir $[0,1]$ mit $\sim$ im disjunkte Klassen partitionieren.

b) <u>Mit Hilfe des Wahlaxioms</u>, Wählen Sie einen Punkt für jede Klasse $\Rightarrow$ Sei

$$A = \{\text{Vereinigung dieser Punkte}\} \subseteq [0,1]$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{R} = \cup_{q\in\mathbb{Q}}\{A+q\} \qquad \text{(als disjunkte abzählbare Vereinigung)}$$

c) Sei nun

$$\tilde{A} := \cup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}\{A+q\} \Rightarrow [0,1] \subseteq \tilde{A} \subseteq [-1,2].$$

Auch eine disjunkte abzählbare Vereinigung.

Wegen die Normierung des Lebesgue-Maßes: $\mathrm{Leb}([a,b]) = b-a \Rightarrow$

$$1 \leqslant \mathrm{Leb}([0,1]) \leqslant \mathrm{Leb}(\tilde{A}) \leqslant \mathrm{Leb}([-1,2]) \leqslant 3.$$

d) Nehmen wir an $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \tilde{A} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{Leb}(\tilde{A}) = \mathrm{Leb}(\cup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}\{A+q\}) \overset{\sigma-\text{Add.}}{=} \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mathrm{Leb}(A+q) \overset{\text{Gleichvert.}}{=} \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mathrm{Leb}(A)$$

$$= \mathrm{Leb}(A)\, \sharp(\mathbb{Q}\cap[-1,1])$$

Aber $\sharp(\mathbb{Q}\cap[-1,1]) = +\infty$. Dann

$$\mathrm{Leb}(\tilde{A}) \in \{0, +\infty\}$$

aber wir haben gesehen dass $\mathrm{Leb}(\tilde{A}) \in [1,3]$. Widerspruch!!!

Es folgt dass $A \notin \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und dann dass $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$. (Wir brauchen die Wahlaxiom).

Nicht überraschend, die Borel'sche $\sigma$-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ kann nicht explizit beschrieben werden. Dies bedeutet auch, dass wir nicht einfach Maße konstruieren können, indem wir ihren Wert für jede Borel-Menge vorschreiben. Solche Maße müssen über eine geeignet kleine Algebra $\mathscr{A}$ von Ereignissen gehandhabt werden, die $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ erzeugt.

---