Vorlesung 4 | 6.11.2020 | 10:15–12:00 via Zoom

Wir haben gesehen:

- σ-Algebra, Maß, W-Maß, W-Raum, Zahlmaß eines endlichen Raumes, Borel'sche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$, eine nicht Borelmessbare Menge von $\mathbb{R}$.

σ-Algebras sind schwer. Wir arbaiten immer mit einen bestimmten Erzeuger $\mathscr{E}$ von $\sigma(\mathscr{E})$.

Wir wollen zwei allgemeine Probleme lösen. Sei $\mathscr{E}$ eine Mengesysteme die eine σ-Algebra $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{E})$ erzeugt, dann

- Maßeindeutigkeit: unter welchen Bedingungen bestimmt die Beschränkung eines Maßes μ auf $\mathscr{E}$ das Maß aller Ereignisse von $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{E})$?

$$\mu|_{\mathscr{E}} = \nu|_{\mathscr{E}} \Rightarrow \mu = \nu?$$

- Erweiterung: unter welchen Bedingungen ist es möglich, eine Abbildung von $\rho: \mathscr{E} \to [0, +\infty]$ auf ein Maß μ auf $\sigma(\mathscr{E})$ zu erweitern?

$$\exists \mu: \sigma(\mathscr{E}) \to [0, +\infty], s.d. \mu|_{\mathscr{E}} = \rho?$$

Ein paar definitionen.

Definition 1. *Sei Ω eine Menge ($\neq \emptyset$), $\mathscr{C}$ eine nicht-leere Teilmenge von $\mathscr{P}(\Omega)$. Das Mengensystem $\mathscr{C}$ heißt:*

a) *durchschnittsstabil, falls $\forall A, B \in \mathscr{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{C}$.*

b) *ein Dynkin-System, falls*

   1. *$\Omega \in \mathscr{C}$;*
   2. *$A, B \in \mathscr{C}, A \subset B \Rightarrow B \backslash A \in \mathscr{C}$;*
   3. *$A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{C}$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \cup_{n \geqslant 1} A_n \in \mathscr{C}$;*

Frage. Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Welche dieser Mengensysteme sind durchschnittsstabil?

a) $\{(-\infty, s] : s \in \mathbb{R}\}$

b) $\{(a, b) : a < b \in \mathbb{R}\}$

c) $\{(a, b] : a < b \in \mathbb{R}\}$

Antwort: a) ja; b) ,c) nein: weil die leere Menge ist nicht drin.

Definition 2. *Ein (nicht leere) Mengensystem $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ heißt Algebra, falls $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$ und $A \cup B \in \mathscr{A}$.*

Bemerkung. $\Omega = A \cup A^c$, $\emptyset = \Omega^c$, $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$.

Lemma 3.

a) Jede σ-Algebra ist ein Dynkin-System

b) Jedes durschnittstabile Dynkin-System ist eine σ-Algebra

Beweis. a) Folgt aus Def. von σ-Algebra.

b) Sei $\mathscr{D}$ ein Dynkin-System mit $A \cap B \in \mathscr{D}$ falls $A, B \in \mathscr{D}$. Zu zeigen $\mathscr{D}$ ist σ-Algebra.

(1) Falls $A, B \in \mathscr{D} \Rightarrow A^c, B^c \in \mathscr{D}$ (weil $\Omega \in \mathscr{D}$) dann ($\cap$-stabilität) $\Rightarrow A^c \cap B^c \in \mathscr{D}$ und dann $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathscr{D}$. (Additivität)

(2) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{D}$. Definieren wir $\tilde{A}_n := \cup_{k=1}^n A_k \in \mathscr{D}$. Dann

$$\cup_{n\geqslant 1} A_n = \cup_{n\geqslant 1} \tilde{A}_n = \cup_{n\geqslant 1} \underbrace{(\tilde{A}_n \backslash (\cup_{1\leqslant k\leqslant n-1} \tilde{A}_k))}_{=:B_n} = \cup_{n\geqslant 1} B_n.$$

Aber $\cup_{1\leqslant k\leqslant n-1} \tilde{A}_k \in \mathscr{D}$ wegen Additivität von $\mathscr{D}$, und $B_n \in \mathscr{D}$ wegen Definition Dynkin-Systeme. Aber $B_n \in \mathscr{D}$ und $B_1, B_2, \ldots$ sind paarweise disjunkt, dann $\cup_{n\geqslant 1} A_n = \cup_{n\geqslant 1} B_n \in \mathscr{D}$ (wegen Dynkin-S.) □

Definition 4. *Sei $\mathscr{C}$ ein Mengensystem, dann ist $\mathscr{D}(\mathscr{C})$ das* ***kleinste*** *Dynkin-System, dass $\mathscr{C}$ enthält.*

Satz 5. *(Satz von Dynkin) Sei $\mathscr{C}$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem, dann $\mathscr{D}(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$.*

Beweis. Zu zeigen: $\underline{\mathscr{D}(\mathscr{C})\text{ ist }\cap\text{-stabil}}$, dann aus Lemma 3 folgt, dass $\mathscr{D}(\mathscr{C})$ eine σ-Algebra ist und $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{C})$ (Def. von $\sigma(\mathscr{C})$). Aber $\sigma(\mathscr{C})$ is auch ein Dynkin-System, dann $\mathscr{D}(\mathscr{C}) \subseteq \sigma(\mathscr{C})$. Es folgt dass $\mathscr{D}(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C})$.

Überblick über die Strategie:

$$\begin{array}{cl} \mathscr{C} \cap \mathscr{C} \subseteq \mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{C}) \text{ (ok, }\cap\text{-stabilität)} & \\ \downarrow & \text{(Teil (a))} \\ \mathscr{C} \cap \mathscr{D}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{C}) & \\ \downarrow & \text{(Teil (b))} \\ \mathscr{D}(\mathscr{C}) \cap \mathscr{D}(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{C}) & \end{array}$$

Teil (a): Für alle $A \in \mathscr{C}$, sei

$$D_A := \mathscr{D}(\mathscr{C}) \cap A = \{B \in \mathscr{D}(\mathscr{C}) \mid A \cap B \in \mathscr{D}(\mathscr{C})\} \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{C}).$$

Zu zeigen: D_A ist ein Dynkin-System.

(1) $\Omega \in D_A$?: Ja, weil $A \cap \Omega = A \in \mathscr{C} \subset \mathscr{D}(\mathscr{C})$.

(2) $B_1 \subset B_2 \in D_A \Rightarrow B_2 \backslash B_1 \in D_A$?: Ja, $B_i \in D_A \Rightarrow A \cap B_i \in \mathscr{D}(\mathscr{C})$, $i = 1, 2 \Rightarrow (B_2 \backslash B_1) \cap A = (B_2 \cap A) \backslash (B_1 \cap A) \in \mathscr{D}(\mathscr{C}) \Rightarrow B_2 \backslash B_1 \in D_A$.

(3) Seien $B_1, B_2, \ldots \in D_A$ paarweise dijunkt, dann

$$(\cup_{n\geqslant 1} B_n) \cap A = \cup_{n\geqslant 1} \underbrace{(B_n \cap A)}_{\in \mathscr{D}(\mathscr{C}),\text{und paarwise disj.}} \in \mathscr{D}(\mathscr{C}) \Rightarrow (\cup_{n\geqslant 1} B_n) \in D_A.$$

Dazu, falls $B \in \mathscr{C} \Rightarrow \ \forall A \in \mathscr{C}, B \cap A \in \mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{C}) \Rightarrow \mathscr{C} \subseteq D_A$.

Da D_A Dynkin ist $\Rightarrow \mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{C}) \subseteq D_A$ fur alle $A \in \mathscr{C}$ (weil $\mathscr{D}(\mathscr{C})$ ist die kleinste Dynkin-S. das $\mathscr{C}$ enhält). Dann $D_A = \mathscr{D}(\mathscr{C})$ für alle $A \in \mathscr{C}$.

Teil (b): Sei D_A wie oben aber jetz für $A \in \mathscr{D}(\mathscr{C})$. Wie oben zeigt man, dass D_A ist Dynkin. Dazu, falls $B \in \mathscr{C}$, $\forall A \in \mathscr{D}(\mathscr{C})$, $B \cap A \in \mathscr{D}(\mathscr{C})$ wegen Teil (a).

$\Rightarrow D_A = \mathscr{D}(\mathscr{C})$, $\forall A \in \mathscr{D}(\mathscr{C})$, d.h. $\forall A, B \in \mathscr{D}(\mathscr{C}), A \cap B \in \mathscr{D}(\mathscr{C})$ d.h. $\mathscr{D}(\mathscr{C})$ ist $\cap$-stabil. □

Jetz definieren etwas, die fast ein Maß ist auf einer Algebra $\mathscr{A}$.

Definition 6. *Sei $\mathscr{A}$ eine Algebra.*

a) Eine Abbildung $\mu: \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ heißt Inhalt, falls: (1) $\mu(\emptyset) = 0$; (2) falls $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$, dann $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Additivität).

b) Ein Inhalt heißt ein Prämaß, falls für folgen disjunkter Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ für die $\cup_{n\geqslant 1} A_n \in \mathscr{A}$, dann gilt

$$\mu(\cup_{n\geqslant 1} A_n) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n).$$

Anmerkung. Falls $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra ist, dann ein Prämass μ ein Maß ist (σ-Additivität).

Lemma 7. *Sei μ ein* **endlicher** *Inhalt auf einer Algebra $\mathscr{A}$. Dann μ ist ein Prämaß $\Leftrightarrow$ $\forall$ monotone Folgen $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ s.d. $A_n \downarrow \emptyset$, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. (Stetigkeit bei der leeren Menge)*

Bemerkung. $A_n \downarrow \emptyset$ bedeutet $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$ und $\cap_{n\geqslant 1} A_n = \emptyset$.

[Bereits in der vorherigen Vorlesung bewiesen]

Bemerkung. Die Bedingung, dass μ nicht endlich sein kann, kann nicht entfernt werden. Bretrachen Sie den Fall wenn μ die Zahlmaß auf $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ (d.h. $\mu(A) = \sharp A$) ist und $A_n = \{k \in \mathbb{N}: k \geqslant n\}$. Übung: Ziegen sie dass μ ein Maß auf $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ ist.

Maßeindeutigkeit

Satz 8. *Sei $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra über Ω, $\mathscr{C}$ ein $\cap$-stabil Mengensystem mit $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{F}$. Falls μ und ν zwei W-maße sind, s.d. $\mu(A) = \nu(A)\ \forall A \in \mathscr{C}$, dann $\mu = \nu$ auf $\mathscr{F}$. Deshalb nennt man $\mathscr{C}$ massbestimmend.*

Beweis. Sei

$$\tilde{\mathscr{F}} = \{A \in \mathscr{F} \mid \mu(A) = \nu(A)\} \subseteq \mathscr{F}. \qquad \mathscr{C} \subseteq \tilde{\mathscr{F}}$$

Z.z.: $\tilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F} = \sigma(\mathscr{C})$.

$$\text{Wenn } \tilde{\mathscr{F}} \text{ Dynkin ist} \Rightarrow \tilde{\mathscr{F}} \underset{\mathscr{C} \subset \tilde{\mathscr{F}}}{\supseteq} \mathscr{D}(\mathscr{C}) \underset{\text{Satz 5}}{=} \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{F}.$$

$\Rightarrow$ Z.z.: $\tilde{\mathscr{F}}$ Dynkin.

(a) μ, ν W-maße: $\mu(\Omega) = 1 = \nu(\Omega) \Rightarrow \Omega \in \tilde{\mathscr{F}}$.

(b) Seien $A, B \in \tilde{\mathscr{F}}$ mit $A \subset B$.

$$\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A) \underset{A,B\in\tilde{\mathscr{F}}}{=} \nu(B) - \nu(A) = \nu(B\backslash A) \Rightarrow B\backslash A \in \tilde{\mathscr{F}}.$$

(c) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \tilde{\mathscr{F}}$ paarweise disjunkt (σ-Additivität von W-maße)

$$\mu(\cup_{n\geqslant 1} A_n) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n) \underset{A_n\in\tilde{\mathscr{F}}}{=} \sum_{n\geqslant 1} \nu(A_n) = \nu(\cup_{n\geqslant 1} A_n) \Rightarrow \cup_{n\geqslant 1} A_n \in \tilde{\mathscr{F}}.$$

□

Bemerkung. Die Aussage gilt auch für σ-endliche Maße. Es reicht aus, die Maße $\mu_n(A) = \mu(A \cap \Omega_n)$ und $\nu_n(A) = \nu(A \cap \Omega_n)$ für eine gut gewählte Mengenfamilie $(\Omega_n)_n$ zu berücksichtigen, s.d. $\Omega_n \uparrow \Omega$.

Erweiterung

Satz 9. *(Satz von Carathéodory)*

- *Sei μ_0 ein σ-endliches Prämaß auf einer Algebra $\mathscr{A}$. Dann $\exists!$ ein Maß μ auf $\sigma(\mathscr{A})$ s.d. $\mu = \mu_0$ auf $\mathscr{A}$.*
- *μ heißt die Erweiterung von μ_0 auf $\sigma(\mathscr{A})$.*

Beweis. (Ohne Beweis, siehen Sie die Vorlesung Analysis 3) □

Bemerkung. Die Borel'sche σ-Algebra ist im wesentlichen die grösstmögliche σ-Algebra auf der sich Maße auf $\mathbb{R}$ konstruieren lassen, die die abzählbare Additivitätseigenschaft besitzen.

[You can consider also Lebsegue-measurable sets, but to do so you need to consider the Lebsegue measure, this is useful in Analysis but less so in probability where not all the probability measure are like the Lebsegue mass, for example later on we will consider Ω to be an infinite dimensional space $\Omega = C([0,1];\mathbb{R})$]

Ein praktisch wichtiger Spezialfall ist die Konstruktion von Maßen auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Folgt von die Satz von Carathéodory, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ durch seine *Verteilungsfunktion* eindeutig charakterisiert ist.

Definition 10. *Sei $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Dann die Funktion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$F(t) = \mathbb{P}((-\infty, t]), \qquad t \in \mathbb{R},$$

heißt Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$. Die Verteilungsfunktion ist eine monoton wachsende, rechtstetige Funktion mit $0 = F(-\infty) := \lim_{t\to-\infty} F(t)$ und $1 = F(+\infty) := \lim_{t\to+\infty} F(t)$.

Satz 11. *Sei $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende, rechtsstetige Funktion. Dann $\exists!$ σ-endliches Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ s.d.*

$$\mu((s,t]) = F(t) - F(s), \qquad \forall s < t.$$

Beweis. (Idee) Mengensystem

$$\mathscr{C} = \{(s,t], -\infty \leqslant s < t < \infty\} \cup \{(s,+\infty), s \in \mathbb{R}\}.$$

Sei $\mathscr{A} = a(\mathscr{C})$ die von $\mathscr{C}$ erzeugte Algebra. (nicht σ-Algebra!,$\mathscr{A}$ alle endlichen Vereinigungen von halboffenen Intervallen und den Halbachsen entält)

Setze

$$\mu((s,t]) := F(t) - F(s)$$

und

$$\mu((s,\infty)) := F(\infty) - F(s).$$

Durch endliche Additivität diese Funktion auf die ganze Algebra $\mathscr{A}$ erweitert werden kann.

Wichtig is dabei die Konsistenz. Für $s < u < t$: $(s,t] = (s,u] \cup (u,t]$

$$\mu((s,t]) = \mu((s,u]) + \mu((u,t]),$$

dann endliche Additivität OK.

Erweiterung von μ auf der von $\mathscr{C}$ erzeugte Algebra $\mathscr{A} = a(\mathscr{C})$. $\Rightarrow$ μ ist ein Inhalt.

Mit Lemma 7 und ein wenig Arbeit, zeigt man, dass μ ein Prämaß ist. (stetig von die leere Menge)

Mit Satz 9 $\Rightarrow$ $\exists!$ Erweiterung auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. □

Bemerkung. Den vollständigen Beweis finden Sie im Skript von Prof. Bovier (Satz 2.17)

Wichtige Spezialfälle

Nehme $F(t) = t$ im Satz 11. Dann:

Folgerung 12. $\exists!$ *Maß auf* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, *das Lebesgue-Maß, dass jeden intervall gerade seine Länge zuordnet, d.h.*

$$\mu([a,b]) = b - a,$$

$\forall a < b$.

Bemerkung. Sie μ das Lebesgue-Maß. Ziegen sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\mu^x(A) := \mu(A + x)$$

ein anderes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ definiert und, dass $\mu^x = \mu$. (Translation-invarianz von die Lebesgue–Maß).

Bemerkung. Falls $F(\infty) - F(-\infty) = 1$, d.h. F ist eine Verteilungsfunktion, dann $\exists$ W-mass $\mathbb{P}$ s.d.

$$\mathbb{P}((-\infty, t]) = F(t) - F(-\infty).$$

OBdA: $F(-\infty) = 0$.

Folgerung 13.

- *Jedes W-maß* $\mathbb{P}$ *auf* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ *ist eindeutig durch seine Verteilungsfunktion*

  $$F(t) := \mathbb{P}((-\infty, t]) = \mathbb{P}(\omega \leqslant t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

  bestimmt.

- *Jede rechstetige, wachsende Funktion* $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ *mit* $F(-\infty)=0$ *und* $F(+\infty)=1$ *ist eine Verteilungsfunktion eines W-maß auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Beispiel. Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t<0, \\ 1/2, & t=0, \\ 1, & t>0. \end{cases}$$

Wir setzen

$$\mu((s,t]) = F(t) - F(s)$$

für $s<t$. Offenbar ist dies ein Inhalt. Aber kein Prämaß, wegen

$$\mu((0,1/n]) = 1/2$$

fur alle $n \geqslant 1$, also auch $\lim_{n\to\infty} \mu((0,1/n]) = 1/2$. Anderseits $(0,1/n] \downarrow \emptyset$, deshalbs μ ist nicht stetig bei der leeren Menge und dann kein Prämass.
